ИЗВЕСТИЯ

СЕВЕРО-КАВКАЗСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО :: УНИВЕРСИТЕТА ::

1928 г.

ТОМ III (XV)

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ.

РОСТОВ НА ДОНУ
1928 г.

Д. Мордухай-Болтовской.

Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики.

Введение.

В истории Математики хорошо разработана та часть, которую можно назвать Анатомией: хронология открытий, элементы заимствованные и оригинальные в математике данного культурного периода. Разработана и Физиология: развитие различных математических теорий мы представляем в зависимости от хода развития других явлений культурной жизни.

Но еще очень слабо затронуто то, что можно назвать Эмбриологией, т. е. генезис математических идей, начиная с их зарождения. В таком исследовании, чрезвычайно деликатном, приходится прибегать к тем источникам, которые обычно обходятся историком математики: прежде всего следует обратить внимание не только на верхнее, но и на нижнее течение математической мысли, не только на научные произведения, но и на забытые большей частью теперь учебники, ибо в них-то резче всего сказывается настроение мысли, кладущее свой отпечаток больше всего на понимание основ науки; во-вторых, приходится обратиться и к философским мировоззрениям исследуемой эпохи, в которых, конечно, не следует искать эмбрионы основных научных идей.

Исследование происхождения основных идей Анализа бесконечно-малых ведет к изучению ныне забытых комментариев Эвклида с исправленными выпрямленными доказательствами, осуществляемыми введением постулатов уже Анализа в скрытой или явной форме, и к изучению философии актуальной и потенциальной бесконечности от Аристотеля через схоластику до рационализма XVII века.

Исследование основных и современных геометрических идей ведет нас к изучению ныне забытых учебников конца XVIII в. и начала XIX в. и, с другой стороны, к изучению кантианства и гегельянства, кладущих свой отпечаток на эти учебники.

Повторяю, что исследования эти должны быть очень деликатны. Очень легко впасть здесь в иллюзию, и историческую эволюцию увидеть в искаженном виде. Это, между прочим, имеет место у математиков с недостаточно развитым историческим чутьем относительно XVII века, внешний облик которого может быть и похож на современную эпоху, но только внешний, так как более глубокое исследование вскрывает непроходимую пропасть.

Я предлагаю читателю ряд очерков из истории математических идей. Эти очерки могут иметь не только историческое значение, но и методическое. Идеи забытые не всегда идеи ложные, а часто только такие, которые не находят применения в ходе современной научной работы, при незначительном в этом смысле научном значении они могут иметь значение педагогическое. Преподаватель, прочтя настоящие очерки, может над многим задуматься.

Эти очерки составляют только небольшую часть моего большого многолетнего труда по истории математики в указанном сейчас направлении. Пройденный мной длинный путь я вспоминаю с признательностью к многим лицам и учреждениям, помогавшим мне в этой, порой нелегкой, работе.

Прежде всего приношу свою благодарность Правлению Северо-Кавказского Государственного Университета и Президиуму Ассоциации Исследовательских Институтов за ежегодные командировки для работы в библиотеках, богатых старыми книгами. Затем приношу свою благодарность профессорам Н. И. Порфирьеву и Н. Н. Парфентьеву, благодаря которым в 1926 году я получил возможность пользоваться при исключительно удобной обстановке богатой книжной сокровищницей геометрического кабинета Казанского Университета. Не могу также не отметить того предупредительного и внимательного ко мне отношения, которое я всегда встречал в библиотеке Московского Университета, а также исключительно любезное ко мне отношение в 1924 г. заведующей математическим отделением Ленинградской Публичной библиотеки.

Наконец, особенную благодарность выражаю Правлению Северо-Кавказского Университета, дающему мне возможность увидеть в печати хотя бы часть этого особенно близкого мне моего духовного детища, причем как раз в столь знаменательное для меня время 30-летнего юбилея моей научной и педагогической деятельности. Приношу также свою благодарность Н. М. Несторовичу, любезно взявшему на себя большую часть труда по исправлению корректуры.

Май 1928 г. Ростов-Дон.

Д. Мордухай-Болтовской.

I. Два основных источника методов решения уравнений.

(XII век).

§ 1. Простое фальшивое правило.[1]

Самые интересные, но, конечно, и самые трудные проблемы истории математики это те, которые относятся к Эмбриологии идей. Обычно история математики исследует ход развития идеи уже в вполне оформленном виде. Хорошо известны все факты, относящиеся к истории числовых уравнений, но не делаются попытки пойти вглубь — исследовать самые корни идей, лежащих в основе этих методов.

Попытки таких исследований я хочу дать. Я хочу показать, что эти идеи с психологической необходимостью должны были развиться из основных свойств нашего ума, при чем хочу проследить, как самые примитивные методы должны были обратиться в современные совершенные.

---

[1] Методическая сторона настоящей темы более развита в моей работе: Риторическая алгебра и арифметические задачи. „Педагогическая мысль“. Ростов н-Дону. 1918.

Самый примитивный способ (но, конечно, не метод) решения задачи — ряд попыток; неизвестное просто подбирается так, чтобы удовлетворило поставленным условиям.

Берется произвольное значение для неизвестного, согласно арабской терминологии: предположение; производятся над ним все те операции, которые должны дать определенный результат.

Если полученный результат не совпадает с данным или, как говорят арабы, отклонение не нуль, то переходят к другому и так дальше, пока не наталкиваются на решение. Так древние египтяне решили вероятно, задолго до Ахмеса[2] задачу вроде следующей:

Разделить 1000 рублей между тремя лицами A, B, C, так, чтобы B получил в $1^1/_2$ раза больше A, C — $^1/_5$ того, что A и B вместе и еще 40 руб.

Ход решения состоял в том, что последовательно предполагают, что A получает 100,200,300 р. и определяют, сколько получит B и C и, наконец, все вместе.

Первая идея, которая должна была придти в голову такова: в том случае, когда результат получается слишком большой, когда отклонение положительно, нужно брать следующее предположение меньше, в противном случае—больше; благодаря этой идее получаются все более узкие области пробуемых предположений.

Конечно, этот уже более совершенный способ основывается на признании, что результат d_0 возрастает вместе с предположением x_0.

Но эта вера не только не обоснована, но, в общем, и неверна.

Это один из законов, управляющих эволюцией идей: всякая истина содержит заблуждение; необходимо всегда признать что-либо неправильное, чтобы продвинуться к правильному.

Такого же рода заблуждение является стимулом и дальнейшего продвижения.

Вторым заблуждением является признание двух величин x и y, единовременно возрастающих, пропорциональными.

Эта ошибка в отожествлении монотонности с прямой или обратной пропорциональностью вместе с тем источник ошибок как ученических, так и тех, которые дает нам история математики. Но эта ошибка вызвала regula falsi,[3] фальшивое правило в его простейшем виде.

Вне сомнения, простейшее фальшивое правило, применимое ко всем задачам, не обосновывается, так как обосновать его, конечно, раньше не было возможности. Ошибка в отожествлении монотонности и пропорциональности не замечалась, так как в первых простейших задачах это действительно имеет место и применение правила было вполне законно.

Открытие regula falsi — бесспорно крупное открытие в младенческий период математики; оно дает возможность, так сказать, одним ударом исправить неправильное решение в правильное.

---

[2] Примитивное решение должно было выступать в периоды упадка математики. Вне сомнений путем проб решались задачи Алкуина.

[3] Regula falsi при решении некоторых задач:

August Eisenlohr.—Ein mathem. Handbuch der Alten Aegypter. Leipzig. 1877.

Бобынин.—Древне-египетская математика в эпоху владычества Гиксов. Журнал Мин. Нар. Просв. за 1909 г., № 10, 11.

Regula falsi применяется в исчислении x a y: главы XI, XII, XIII.

Фальшивое правило у индусов ishta karman. Как отмечает Кантор, египтяне пользовались этим правилом инстинктивно, а индусы вполне сознательно. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. I, s. 371.

Если при взятом предположении x_0 результат d_0 вдвое менее данного d, то искомое x вдвое более x_0; если

$$d_0 = 3d, \text{ то и } x_0 = 3x \text{ и т. д.}$$

Приведенная выше задача так решается по простому фальшивому правилу:

Отняв от 1000 р.— 40 р. (т. е. прибавку, полученную С сверх $1/5$ части А и В), т. е. взяв 960 руб. будем делить так, что В получит в $1^1/_2$ раза более А, С $1/5$ того, что А и В вместе.

Предположим, что А получит 4, тогда В—6, а С—2; все вместе—12, вместо 960 р., т. е. в 80 раз меньше. Отсюда делается заключение, что ошибочный слишком малый результат получился потому, что предположение взяли слишком малое. Если возьмем в 80 раз больше, то В и С получат в 80 раз больше и самая сумма будет в 80 раз больше, т. е. 960 рублей.

В алгебраической символике правило это будет представлять метод решения уравнения первой степени:

$$ax + bx + c\ (a'x + b'x) = d \tag{1}$$

без соединения подобных членов.

А именно берется для x какое-нибудь значение $x = x_0$ и определяется число d_0, которому равен результат подстановки в левую часть ур. (1) этого решения $x = x_0$, так что

$$ax_0 + bx_0 + c\ (a'x_0 + b'x_0) = d_0; \tag{2}$$

x определяется по формуле:

$$x = x_0 \frac{d}{d_0} \tag{3}$$

которую не трудно вывести из (1) и (2).

Для разобранного нами примера имеем уравнение:

$$x + \frac{3}{2}x + \frac{1}{5}(x + \frac{2}{3}x) = 960$$

$$x_0 \text{ полагается равным } 4;\ d_0 = 12, \frac{d}{d_0} = 80.$$

$$x = 4.\ 80 = 320.$$

Пропорция $x : x_0 = d : d_0$ является в глазах старых математиков чем-то самым по себе очевидным и не доказуется.

Но если бы пожелали ее строго доказать, то пришлось бы делать то, что мы избегаем с помощью этого метода, т. е. соединение подобных членов в ур. (1) и (2).

§ 2. Сложное фальшивое правило.

Если теперь вместо уравнения (1) взять:

$$e\ [ax + bx + g + c\,(a'x + b'x + h)] = d$$

и соответствующие ему арифметические задачи, то и в этом случае делалось заключение:

$$x = x_0 \frac{d}{d_0},$$

если

$$e\ [ax_0 + bx_0 + g + c\,(a'x_0 + b'x_0 + h)] = d_0 \tag{5}$$

что давало, конечно, неправильный результат

$$(\text{если } g + ch \gtreqless 0).$$

Уже в реторической Алгебре арабов мы видим понимание неприменимости к этим случаям простого фальшивого правила (хотя не отмечается признак, позволяющий отделить первый случай от второго) и замену простого regula falsi сложным.[4] Здесь regula falsi уже не арифметический метод решения, а реторическая формула.

Берем формулировку Бэг-Эддина:

„За неизвестное бери произвольное и назови его первым предположением и вычисли с помощью его предложенную задачу, если совпадает, то это и есть решение.

Если отклонится в одну или другую сторону, то получишь первое отклонение.

Возьми другое число и назови его вторым предположением, если произойдет отклонение, то это будет второе отклонение.

Помножь первое предположение на второе отклонение, назови это — первым результатом. Затем второе предположение на первое отклонение — вторым результатом. Если оба отклонения зараз положительны или отрицательны, раздели разность обоих результатов на разность отклонений, если же они различны, раздели сумму результатов на сумму отклонений — частное будет искомое число“.

Откуда

$$x = \frac{x_2 \delta_1 - x_1 \delta_2}{\delta_1 - \delta_2} \tag{5}$$

$$\delta_1 = d - d_1 \ , \ \delta_2 = d - d_2$$

что, конечно, в символической Алгебре не представляет затруднений доказать.

Еще в учебнике XVIII столетия в таком виде входило фальшивое правило.[5]

Приведем пример из учебника Магницкого:

„Вопроси некто учителя своего глаголя: повеждь ми, колико имаши учеников у себе во училище, понеже имам сына отдати во училище и хощу уведати о числе учеников твоих. Учитель же отвещав рече ему: аще придет ми учеников толико же, елико имам, и полтолико, и четвертая часть, еще же и твой сын, и тогда будет у мене учеников 100“.

Решение Магницкого:

Пусть учеников 24 — первое предположение:

$$24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67$$

ошибка 33.

---

[4] Khelasat al Hisab ou Essence de Calcul de Beha-Eddin. Nouvelles Annales, t. V. 1846. Regula falsi, называемое также правилом уменьшения и увеличения, находится у Авраама бен Эзра (1130), Ибн Албани (1222), Алказади (1480).

О них смотри: Libri. Histoire des sciences math. T. I, p. 304 — 312. Сочинение Альбани переведено на французский язык: Talkys d'Ibn Albani publ. et traduit par Aristide Mare. Rome 1865, p. 26 — 27. О Бэг-Эддине см. Nesselman. Behe-Eddins der Rechenkunst. Berlin. 1843.

[5] Магницкий. Арифметика.

Пусть учеников 32 — второе предположение:

$$32+32+16+8+1=89$$

ошибка 11.

$$24 \,.\, 11=264 \text{ (первый результат)}$$
$$32 \,.\, 33=1056 \text{ (второй результат).}$$

По общему правилу решение равно

$$\frac{792}{22}=36.$$

§ 3. Способ приближенного решения уравнений.

Regula falsi, бесспорно, родоначальник приближенных методов вычисления. Сущность простого фальшивого правила можно представить: следующим образом: полагая в уравнении

$$A(x)=K \tag{6}$$

$x=x_0$; имеем

$$A(x_0)=K_0 \tag*{(6)$_0$}$$

Решение тогда определяем из пропорции

$$\frac{x}{x_0}=\frac{K}{K_0}$$

Если нельзя указать точное значение для x, естественно довольствоваться приблизительным, которое как можно меньше отличается от первого.

Такое неточное значение x находится примитивным способом проб, как это указано в § 1.

Предположим, что система операции A (x) разлагается на C (x) и D (x); уравнение (6) символически представляется в следующем виде:

$$[C(x), D(x)]=K \tag{7}$$

Пусть все затруднение в D (x).

Задачу $C(x)=K$ мы решили бы просто. (8)

Конечно, первое, что приходит на мысль, это просто отбросить D (x) и решать ур. (8).

Этот прием может дать приближенное решение, но как получить еще **более точное**?

Тут выступает благотворная идея.

При разыскании более точного значения x не отбрасывать D (x), а производить эти операции над первым приближением $x=a$, т. е. решать уравнение

$$[C(x), D(a)]=K \tag{9}$$

В этом и состоит выправление неточного решения в более точное $x=b$.

Следующий момент состоит в решении уравнения

$$[C(x), D(b)]=K \tag{10}$$

и т. д.

И здесь метод обоснован на вере в то, что в общем случае, конечно, неправильно, что ряд a, b, c.... сходится к корню заданного уравнения (7). (7)

В то время, как в первоначальном виде выправление ложного предложения на основании полученного при нем результата производилось до точного значения неизвестного, при переходе от точного решения уравнения к приближенному понятие о выправлении ложного предложения обратилось в полученное из этого ложного предложения другого, тоже ложного, но более, чем первое приближающегося к истинному.

Для решения Кеплерова уравнения

$$x - e\sin x = u \tag{11}$$

где u, e даны, при чем e мало, берут $x = u$ за первое предположение — первое грубое приближение x_0.

Выправление этого грубого приближения совершается с помощью уравнения

$$x - e\sin x_0 = u$$

дающего тоже неточное, но, вообще, более полное, чем первое, приближение.

Эта же идея прилагается и Жерардом [6] к решению уравнения третьей степени

$$x^3 - m^2r^2x - m^2r^3 = 0 \tag{12}$$

к которому сводится всякое уравнение типа.

$$x^3 - px - q = 0$$

Полагая

$$\sin^2\omega = \frac{x}{r}$$

приводим (12) к виду

$$\sin 2\omega + 2m = 2\operatorname{tg}\omega.$$

Для получения последовательных приближений, берем $\omega = x$ (приближ. полученного пробами).

Второе получаем из уравнения

$$\sin 2\omega + 2m = 2\operatorname{tg}\alpha,$$

третье из

$$\sin 2\omega + 2m = 2\operatorname{tg}\beta.$$

В этом виде regula falsi избегают даже в высших технических заведениях, вследствие невозможности строгого обоснования этого метода.

Конечно, это большая ошибка, ибо высшее техническое заведение должно обращать внимание на те отделы математики, в которых нуждаются технические науки, и лучше дать технику в руки плохо обоснованный метод решения трансцендентных уравнений, чем не дать ничего.

С развитием разложения в ряды, как орудия исследования, regula falsi принимает такую форму: $x = x_0$ грубое приближение корня уравнения

$$f(x) = 0 \tag{13}$$

[6] Albert Girard. Invention nouvelle en l'Algèbre. Amsterdam. 1629.

Эта форма regula falsi называется иными prope veri, см. Эйлера.—Theoria planetorum et commetarum, также Ньютона: De mundi systema in fine Princip. L. 3. 41.

так что точное значение будет:

$$x = x_0 + h.$$

Уравнение (13) представляется в форме разложения

$$a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots = 0.$$

К этому-то уравнению и применяется та операция, которую мы прилагаем к уравнению Кеплера, т. е. отбрасывание членов:

$$a_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots$$

иначе говоря, в них полагается $h = 0$ и определяется первое приближение

$$h_1 = -\frac{a_0}{a_1}.$$

Полагая

$$x = x_0 + h_1 + h' = x_1 + h',$$

мы аналогично определяем уравнение для h'_2; с помощью его приближаемого значения, получаемого отбрасыванием членов $a^1_2\, h^1_2 + \ldots$, выправляем x_1 до более точного значения $x_1 + h^1$ и т. д.

Формула Тейлора дает возможность написать для h, h', h'' так сказать готовые формулы и установить так называемый метод Ньютона приближенного определения корней уравнения.

§ 4. Regula infusa в Арифметике.

В чем состоит трудность чисто арифметического решения задач?

Конечно, в наглядно-реторическом истолковании дистрибутивных операций, выраженных формулой:

$$(a + b)\, c = ac + bc$$

Если a, b, c целые числа, то это не представляет затруднений.

Легко убедить, что если

5 мужчин получает в день по 2 р.
7 женщин „ „ „ 2 „

то рассчитать всю полученную ими сумму можно двояко: сперва рассчитывая сумму, полученную мужчинами, 2 р. $\times$ 5 = 10 р., затем женщинами 2 р. $\times$ 7 = 14 р. или же, соединив всех, брать 2 р. $\times$ 12 = 24 р.

Но возьмем задачу: Мальчик получил от отца на расходы в начале недели некоторую сумму денег и в продолжение недели истратил 2 рубля. На одну треть оставшейся у него части и на подарок 50 к. от дяди в конце месяца он купил воздушный змей в 1 р. 50 к.

Сколько он получил денег от отца?

Уравнение, разрешающее вопрос:

$$\frac{1}{3}(x - 2) + \frac{1}{2} = 1^1/_2$$

Решение его

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = {}^3/_2$$

и т. д.

Но эта операция арифметически не истолковывается, так как $^2/_3$ руб. не имеют конкретного смысла.

Нетрудно видеть, каким образом мы должны построить решение этой задачи, совершенно не соответствующее обычному методу решения уравнений первой степени.

Мы должны итти по тому пути, который соответствует решению уравнения 1-й степени в арабской алгебре в позднейших стадиях ее развития, названному Абрахамом Эзра [7] Regula infusa, иначе метод подстановки.

Уравнение:

$$\left(x - \frac{1}{3}x - 4\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{3}x - 4\right) = 20. \qquad (20)$$

Эзра решает (если ввести современный символический язык алгебры), полагая

$$x - \frac{1}{3}x - 4 = y, \qquad (21)$$

что приводит уравнение (21) к более простому:

$$y - \frac{1}{4}y = 20, \qquad (22)$$

которое уже не трудно разрешить.

В приведенной нами задаче за неизвестное следует принять не сумму, полученную мальчиком от отца, а то, что у него осталось после траты 2 рублей; $^1/_3$ этой суммы равна $1^1/_2$ рубля без дядиных $^1/_2$ р., т. е. 1 рублю.

Значит, это новое искомое равно 3 р., а первоначальное поэтому=5 р.

Я укажу на одну очень интересную и в методическом отношении нелегкую задачу:

У двух мальчиков Ивана и Петра имеются орехи. Если Петр даст Ивану один орех, у них оказывается поровну. Если же Иван даст Петру один орех, у Петра оказывается вдвое больше, чем у Ивана.

Здесь путь решения идет конечно через regula infusa. За неизвестное следует принимать не число орехов у Петра, а то число, которое будет иметь Иван, когда у него отнимут один орех, или Петр, когда отнимут у него три.

§ 5. Генезис и основная идея regula infusa.

Я нарочно начинаю с рассмотрения методического значения regula infusa, чтобы подчеркнуть, что в то время, как regula falsi имело огромное значение в истории необоснованных, чисто автоматических решений, regula infusa имело значение в построении обоснованных решений.

Идея состоит в том, что задачи решаются в два или более, чем два, приема. Вместо того, чтобы определить x, мы определяем y, хорошо сознавая, что узнав y, узнаем также и x.

---

[7] Matthiessen. Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra der Lit. Gleichungen. Leipzig. 1878.

Мы хорошо знаем, что ученик всегда за x принимает то, о чем спрашивают, между тем, как во многих задачах следует принимать за неизвестное нечто иное и, уже найдя последнее искомое, найдем ответ на вопрос.

Эта идея покажется нам и проще и менее значительной, чем та, что лежит в основе regula falsi.

Но если вникнуть глубже, то будет видно, что она определяет уже более высокое математическое развитие и уже в силу этого должна была явиться позже.

Мыслить единым то, что является в многообразии, всегда представляет затруднения.

Учитель хорошо знает затруднения, которые встречаются при применении формулы:

$$a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

к выражениям

$$4\,x^2y^2 - 81\,z^4$$
$$[2\,x^3y^2 + 5\,xy^2]^2$$

и т. д.

Вот уравнения, решение которых представляет методический интерес (в каковой форме прилагается regula infusa, предоставляем продумать читателю):

1) $2{,}1345\ (x - 0{,}5678) + 1{,}3356 = 7{,}7391.$

2) $3\ (x + y + 0{,}689) + 2\ (x - y - 0{,}689) = 14.$

$$x + y = 3{,}311.$$

3) $5{,}07833\ (0{,}56896\,x + 2) + 4{,}72167\ (0{,}56896\,x + 3) = 20.$

Здесь следует положить

$$0{,}56896\,x + h = y$$

и искать h так, чтобы исчез свободный член.

§ 6. Диофант.[8]

Дальнейшая стадия развития regula infusa состоит в том, что задача об определении x сводится к задаче об определении *y* из задачи, условия которой подбираются так, что эта последняя задача разрешается и при этом простейшим образом.

Эта идея и лежит в основе Диофантовых методов.

У Диофанта нигде нет проблемы, которая выражалась бы в нашей символике уравнениями:

$$ax^2 + bx = c$$

или

$$ax^2 = bx + c$$

и т. д.

Некоторые историки-математики предполагают, что та часть сочинения Диофанта, в которой излагается решение квадратного уравнения, до нас не дошла. Но едва ли это так, ибо иначе там, где Диофант имеет дело с квадратным уравнением, он делал бы ссылку на утерянную часть сочинения. Читая соответствующие места, мы получаем скорее впечатление того, что Диофант не сознает, что некоторый класс

---

[8] Издание Диофанта: Guil. Xilander: Diophanti Alexandrini rerum arithmeticarum — libri sex. Изд. Bachet 1760 с примечаниями Ферматa о Диофанте. Cantor. Vorlesungen. B. I, s. 433.

рассматриваемых им проблем сводится к одной и той же проблеме решения квадратного уравнения.

Во всех весьма многочисленных проблемах, сводящихся как к определенным, так и неопределенным уравнениям, Диофант признает только следующие пути:

1) В системе

$$\begin{gathered} f(x, y, z \ldots) = 0 \\ h(x, y, z \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g(x, y, z \ldots) = 0 \end{gathered}$$

подобрать для x, y, z... такие выражения

$$x = \alpha\xi + \beta, \; y = \gamma\xi + \delta, \; z = \varepsilon\xi + \zeta \ldots,$$

чтобы удовлетворились все уравнения, кроме последнего, а последнее свелось бы к уравнению первой степени

$$M\xi + N = P\xi + Q. \tag{23}$$

2) Тем же путем, той же заменой или заменой

$$x = a\xi^2 + b, \; y = c\xi^2 + d, \; z = e\xi^2 + f$$

удовлетворить все уравнения, кроме последнего, приведя последнее к уравнению высшего порядка, но такого, которое по сокращении на ξ^2 сводилось бы или к уравнению первой степени, или к уравнению:

$$M\xi^2 + N = P\xi^2 + Q \tag{24}$$

До 29-й задачи I книги мы имеем только системы уравнений первого порядка.

Система задачи 29-й:

$$ax = y^2 \qquad bx = y$$

приводится к уравнению

$$ax = b^2x^2$$

сокращение которого на x (гипобибазм) дает уравнение первой степени.

30-я задача:

$$x + y = a, \; xy = b,$$

т. е. задача об определении чисел по сумме и произведению решается так для случая системы избранных Диофантом числовых значений:

$$x + y = 20, \; xy = 96$$

Принимается разность $x - y$ за 2ξ,
тогда полуразность равна ξ.

Но полусумма $= 10$ вместе с полуразностью ξ составляет большее число, так что большее число есть $\xi + 10$.

Полусумма без полуразности—это меньшее число, так что оно равно $10 - \xi$, затем на основании тождества:

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b),$$

известного Диофанту, произведение их равно

$$100 - \xi^2,$$

так что

$$100 - \xi^2 = 96,$$

откуда

$$\xi^2 = 4 \text{ и } \xi = 2.$$

§ 7. Генезис Чирнгаузеновского преобразования.

Совершенно иначе обстоит дело у индусских математиков: мы здесь имеем и совершенно определенное правило, определяющее ряд формальных операций над уравнением, и окончательную формулу для корня уравнения

$$ax^2 + bx = c$$

в реторической форме.

Правило Кридхара:

„Следует умножить на 4 раза число квадратов оба члена и прибавить квадрат числа неизвестных", т. е. от

$$ax^2 + bx = c$$

следует перейти к...

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac,$$

а отсюда к

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac,$$

дающему

$$(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$$

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$$

Конечно, и здесь осуществляется идея regula infusa, но в простейшей форме; подстановка дается в полной определенности. Дальнейшее развитие должно пойти по тому пути, который указывается методами Диофанта, в которых дается лишь форма подстановки, значения же параметров подбираются надлежащим образом.

Мы предлагаем наши обычные методы (индусского и арабского происхождения) Виэты сравнить с методом Диофанта, который, полагая в уравнении

$$ax^2 + bx + c = 0$$

вместо x... $y + m$, приводит его подлежащим подбором к чистому уравнению

$$\alpha y^2 + \beta = 0.$$

Это, конечно, начало Чирнгаузеновского преобразования.

От

$$x = m + y$$

естественно переход к

$$x^2 = mx + n + y \tag{25}$$

$$x^3 = mx^2 + nx + h + y \tag{26}$$

Чирнгаузен[9] решает уравнение третьей степени

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{27}$$

сводя его с помощью (25) к уравнению

$$y^3 + Py^2 + Qy + R = 0; \tag{28}$$

m, n определяются из уравнений $P = 0$, $Q = 0$ (первой и второй степени), так что (28) сводится к двухчленному уравнению

$$y^3 + R = 0.$$

[9] Ehrenfriedt Walter von Tschirnhausen (1651—1708).
Cantor. Vorlesungen B. III, s. 111, см. его переписку с Лейбницем. Leibniz. Opera IV, s. 423—500.

Д. Мордухай-Болтовской.

II. Генезис современного числа.

(XIII век).

§ 1. Количество у Аристотеля и у схоластиков.

Аристотель в своих „категориях“ отмечает три свойства количества.[1] Первое—количество не имеет себе противного. Второе не принимает больше или меньше[2]. Это последнее утверждение может родить большие недоразумения. Здесь как будто утверждается нечто совершенно нелепое: невозможность прямой площади, объему быть больше другой такой же величины. Но Аристотель хочет сказать только следующее: эти прямые не могут быть больше прямой, чем та, эта площадь больше площадью, чем та. Будет ли площадь содержать 1000 кв. метров или 0,001 кв. метров, все равно она будет оставаться площадью. Нельзя сказать haect linea est magis linea quam illa (эта линия больше линии, чем другая), но можно сказать possit esse maior illa (может быть больше той). Это, разъясняет Аристотель, имеет место, когда одно количество в различных частях распространяется больше или меньше.

Понимание Аристотеля здесь затруднительно вследствие того, что понятие, означенное русским словом количество[3], не вполне отвечает Аристотелевской категории.

Мы говорим о количестве часто в смысле числа, между тем по Аристотелю количество является тем, к чему прилагается число или, вернее, величина.

В каждой вещи есть качественное содержание и величина. A и B только тогда можно отнести к одному роду количества, если это качественное содержание у них одинаково, если нет ничего в A больше, чем в B.

Третье свойство — это равенство и неравенство,[4] существующее между двумя количествами. При этом Аристотель приводит различие равенства и неравенства в массе и совершенстве.[5] Так как сами категории являются совершенно неопределенными, то проблема о сущности количеств по мнению схоластиков должна пониматься, как проблема о разыскании только характерного признака количеств. Указанные Аристотелем признаки может быть во всей совокупности и охарактеризовывают количество, но в отдельности они таковы, что каждое относится не к одному, а к нескольким категориям.

---

[1] Аристотель (384--322). О нем. см. Историю философ. Zeller'a, Windelbandt'a и др. Aristotelis. Opera omnia graece et latine. Parisiis. Didot, t. I. De praedicamentis.

(Categoriae) Cap IV. Об Аристотеле работы Biese, Philosophie der Aristoteles. Berlin, 1877 и др. библиограф. см. Ziehen. Lehrbuch der Logik о его значении для истории Матем. Cantor. Vorlesungen. B. I, s. 238.

[2] Cap. IV, 9 и 3. Следует отличать τὸ πόσον — quantum от ποσότης — quantitas.

[3] Arist. Categ. IV.

[4] Categ. IV, 9, 12, 21.

[5] Arist. Met. lib. VIII.

Схоластическая [6] мысль здесь далеко шагает за границы чисто аристотелевских воззрений. Как и в других случаях скоттическая [7] точка зрения прогрессивна, [8] томистическая консервативна. Последняя старается путем компромиссов закрепить старые теории и, с одной стороны, ближе к старому аристотелевскому мировоззрению, с другой стороны, к далеко грядущему XVII веку рационализма. [9]

Сущность количества по Фоме Аквинату состоит в распространенности частей в порядке друг относительно друга. [10] Порядок частей характеризует количество. Это первое, что воспринимается в количестве, корень всех его свойств. Отсюда вытекает и его делимость и его протяжимость и проницаемость, благодаря ему оно способно быть изменено. Говоря современным языком, Фома стоит за приоритет ординального, а не координального числа.

Отсюда в дальнейшем должен быть сделан вывод о существовании неделимых количеств, ибо делимость вовсе не первичное, а только вторичное производное свойство количества. Идею актуально бесконечно малого, как неделимости, идею Кеплера [11] и Кавальери [12] родит направление именно Фомы, а не Скотта, которого можно назвать функциональным, в котором можно усмотреть эмбрионы идей переменного, предела и т. д., которое безграничную делимость материи полагает не только в нашем уме, но еще как бы частично объективирует, помещая ее в особой промежуточной плоскости существования, отмечаемой скоттистами термином: formaliter ex natura rei (формально по природе вещи). [13]

Но томистическое количество уже не совпадает с античным, чисто пространственным. Уже ко времени Фомы схоластическая мысль в большей мере проявила абстрагирование, эмансипацию от пространственных пут. [14] Согласно томистическому воззрению, геометрические объекты определяются по характеру связей между частями. Линия — не длина без ширины и глубины, [15] как это желает Евклид, а количество, распространенное в длину, части которого связуются обеими точками. [16] Фомой смутно

---

[6] О схоластике. Heaureau. De la philosophie Scolastique, p. I, II. Paris.
Rousselot. Etude sur la philosophie de moyen âge.
Подробное изложение средневековых философских систем:
Tiedemann. Geist der speculativen Philosophie. B. IV. Marburg 1793.

[7] О Дунсе Скотте (1274—1308) и скоттистах см. Pluzanski. Essai sur la philosophie de D. Scott. Paris 1887. Изложение его системы. Boyvin. Philosophia scotica. 4 t. Paris 1668. Abergoni. Resolutio doctrinae Scoticae. Lyon 1643.

[8] **Фома Аквинат** (1227—1274). Его сочин. Sancti Thomae Aqunatiis doc. angelici. Opera omnia jussu Leonis XIII. Romae 1884. Изложение его системы. Guerinois Clypeus Thomisticae Philosophiae. Venetii также учебники: Piny, Reichl., Schnell, Rabes и многие другие.

[9] Рационалисты: Декарт (1596—1650), Арно (1612—1694), Гейлинкс (1625—1669), Мольбранш (1638—1715) см. Ziehen. T. I. kap. 2, s. 26—29. Тщательный и тонкий анализ рационалистической мысли в книге Е. Спекторского. Проблема социальной физики в XVII веке. Варшава 1910.

[10] S. Thom. Aq. 4 Contra gent. C. 65. Summa Theologiae I p. q. 14 ar. 12. Opusc. 76. q. 5, art. 3. Opusc. 48 art. 12. Того же мнения и Суарец.

[11] Kepleri. Nova Stereometria dolorum. Opera omnia IV, p. p. 537—538.

[12] Cavalieri. Geometria indivisilibus contin. nova quodam methode promota Bononiae (1635, 1653).

[13] Formaliter ex natura rei, см. Boyvin, Prantl, Geschichte der Logik.

[14] О пространственном мышлении античной математики см. Шпенглер. Закат Европы. 1923, гл. I. О смысле числа.

[15] Начала Эвклида.

[16] Критику Эвклидова определения мысли с точки зрения требований, предъявляемых аналитиками к определению—см. Arist. Topic. Lib. VI, cap. VI. 5.

сознается, что в линии более существенным, чем ее длина, являются те свойства, которые определяются аксиомами порядка, относящимися к ее точкам. Поверхность не величина, имеющая длину и ширину без глубины, а количество, распространенное в длину и ширину, части которого связуются линиями. Тело—не величина, имеющая длину, ширину и глубину, а количество, распространенное в длину, ширину и глубину, части которого соединяются поверхностями.

§ 2. Делимость и измеряемость количества.

Другие схоластики [17] выдвигают именно делимость [18], как характерное свойство количества. Спор о том, представляет ли делимость сущность или, точнее по схоластической терминологии, формальное понятие количества, особенно ярко выявляет способность схоластической мысли к тонкому различению понятий.

Одно из возражений состоит в том, что деление является чем-то относительным, что оно мыслится, как отделение одного от другого и абсолютная категория ни в коем случае не может характеризоваться таким относительным признаком.

В определении Фомы порядок является тоже относительным понятием, но там он выставляется только, как признак, характеризующий распространенность.

Разбор возражений ведет к различению деления в этом относительном смысле, т. е. в смысле отделения от деления в смысле дробления целого на части. Схоластический анализ разлагает деление на два акта: первый определяет границы частей и разделенный этим первым актом отрезок мыслится, как ограниченный двумя точками, с точками между ними. Второй акт раздробляет целое на однородные части, он дает вместо данного отрезка совокупность уже разделенных аналогичных отрезков. Конечно, такое различение вполне правильно. Будем делить отрезок на части $^1/_2, ^1/_4, ^1/_8$... Каждая часть у нас отделится от целого после конечного числа операций, но вся совокупность операций, ведущих к раздроблению, будет бесконечна.

В этом интересном возражении отмечается, что если бы делимость [19] была сущностью количества, то во всяком количестве оно было бы или только в потенции, способность к делению, или только актом, т. е. производимым или произведенным делением, между тем, как в непрерывном мы имеем первое, возможность деления, между тем как в числе второе, так как число в мысли является уже разделенным на единицы.

В высокой степени интересны аргументы в пользу измеряемости [20], как характерного признака. Измерение мыслится, как некоторая операция последовательного прибавления частей до получения полного целого или последовательного вычитания их из того, частью чего является данное.

Этой операции можно противопоставить операцию получения совокупности уже разделенных частей для получения последнего.

Если первой операции соответствует суммирование сходящихся рядов и она может быть поставлена в основе Архимедова метода [21]

---

[17] Подробный разбор различных схоласт. мн. См. Guerinois Clipeus. Q. III, art. 3.

[18] Scotus, Soncinas (Quaestiones Metaphysicae acutissimae 1622), Capreollus и др. ссылаются на Arist. 5 Meth.

[19] Soncinas Met Lib V. Q. XXI.

[20] Albertus Magnus (1193—1280). Opera ed. Pet. Jammy Lyon 1653, vol 21.

[21] Определение Архимедом площади сегмента параболы.

определения площади параболы,[22] если этот метод исследования переработать в современную теорию пределов, то второй отвечает точке зрения исчисления бесконечно малых, смотрящей на конечную величину, как на сумму (или вернее предел суммы) бесконечно малых, т. е. точке зрения Кеплера и Кавальери.

Утверждение, что измеряемость является характерным признаком количества, сводится к тому, что количество постигается только сравнением с единицей, предполагающим ряд операций, приводящих от этой единицы к целому.

Защитники этой точки зрения указывают в свою пользу то, что только измерением различается место[23] от занимающей это место поверхности, а именно: первое измеряется изнутри, второе извне, т. е первое получается прибавлением, второе вычитанием.

В возражениях на эти взгляды смутно выступает переменное количество, как остающееся количество, несмотря на то, что теряет свою измеряемость; таким переменным является в этих возражениях бесконечно продолжаемая прямая.

§ 3. Виды количества.

Другая важная схоластическая проблема, ведущая в том же направлении, абстрагирование, числа, это проблема о видах количества.

Аристотель различает величины, составленные из частей, имеющих взаимное расположение, от величины из частей без взаимного расположения [24].

К первым он относит линии, поверхности числа, а ко второму число, время. Такое деление совпадает с делением на пространственные и непространственные.

Но эта классификация отнюдь не совпадает с другой, в которой количество делится на непрерывные и дискретные (continua, discreta).

К первому классу относятся линии, поверхности, числа, ко второму число и слово.

Чистой непрерывной, непространственной величины у Аристотеля нет. Ее нет и у Фомы.

Третье аристотелевское деление—на остающиеся (permanens) и последовательные [25] (sucsesiva).

Первое то, которого части существуют в одно и то же время, как, например, прямая линия, вторая часть которого полагается в постоянном течении, как время.

В первой аристотелевской классификации усматривается очень ранний эмбрион абстрактных величин, противопоставляемых геометрическим.

К первому роду сам Аристотель может отнести только целое число, но в будущем этот род пополняется числами дробными, рациональными и, наконец, иррациональными.

Во второй классификации непрерывная геометрическая величина противополагается прерывному целому числу. В далеком будущем арифметизация математики разрушает эту перегородку, устанавливая непрерывность чисел.

---

[22] Archimedis. Opera (ed. Heiberg) I s. 288. см. также Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Llipzig. 1894. B. s. 289. Архимед (287—212 до Р. Х.)

[23] О месте (Locus) см. Aristotelis. Naturales Ausculationes Lib. IV Cap. I, II, III.

[24] Arist. Categ. Cap. IV.

[25] Там же.

Наконец третья классификация дает источник идеи, противополагающей постоянное переменному.

Время в раннем периоде развития математического анализа является первым независимым переменным (напр. у Ньютона).[26]

Но только, конечно, комментирующие его схоластики не мыслят последовательную величину в нашем смысле переменной.

Здесь мыслится только способ образования постоянного, образование определенного промежутка времени путем последовательного наложения составляющих его частей: $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$, но не мыслится еще последовательно проходящее через свое значение.

У Аристотеля, как и в его учении о субстанции с полноправными величинами[27] выступают еще и неполноправные, дающие богатую пищу для схоластических размышлений.

Наряду с собственно-количеством, Аристотель указывает то, что может быть признано таковым только по случайности (per accidens).[28]

Белое не представляет в собственном смысле количества: большая или меньшая белизна определяется только большей или меньшей поверхностью.

Тщательный анализ Фомы Аквината приводит его к признанию только трех непрерывных собственно-количеств, при чем все три являются пространственными: линию, поверхность, тело.[29]

Время[30] само по себе не является распространенным. Распространенным является только движение. Продолжение во времени распространено в частях только в смысле продолжающейся и в своем бытии пребывающей вещи.

Но и само движение[31] Фомой не признается в собственном смысле количеством. Спор о правах времени — в корне — спор между зарождающимся мировоззрением функциональным и окристаллизованной величины.

Почему же время не признается полноправным количеством? Оно неполносущее (Ens incomplet), как и движение, которое измеряет, которое является только стремлением к конечному члену. Здесь схолистическое incompletus скользит около идеи переменного.

§ 4. Единица и единство.

История числа—это вместе с тем и история единицы и нуля, постепенное завоевание этими арифметическими пасынками прав гражданства.

Эвклид в VII книге[32] Начал говорит: „единица есть то, в рассуждении чего вещь называется единой", а число „собрание единиц". Здесь единица еще не число, а само число только собрание единиц[33].

---

[26] Newtoni. Methodus fluxionum. 1678. в Opuscula Newtoni I (есть и на французском языке. Cantor III 108, 168.

[27] Учение Аристотеля о субстанциях. См. Met. V, cap. VIII.

[28] Categ. Cap. IV.

[29] S. Thom. S. T. 1 p. 30 art 3. Quodlibeta 10 art. 1. q. b. de Potentia art. Z. Guerinois. Clypeus P. T. 1 II de Praed. Art. IV II.

[30] О времени S. Thom. 5 Met. Cap. 13.

[31] О движении (Аристотель не называет движение, перечисляя роды количеств в 5 кн. Метафизики. Движение не количество — большинство фомистов против Фонсеки, Конимбринценза и др.)

[32] Эвклид. Начала 7 книги, изд. Петрушевского, очер. 2. Euclides Elementa funfzehn Bücher uberz J. Lorenz. Halle 1840.

[33] Единица по Аристотелю Met. Lib II Cap. IV, 25. Аристотель выражается несколько иначе, противополагая единицу не числу, а множеству единиц и множества противоположны в числе, единица противоположна множеству, как мера тому, что измеряется. Arist. Met. lib X Cap. VI.

Для того, чтобы число подверглось дальнейшей эволюции, чтобы оно стало дробью, а дробь превратилась в число иррациональное, необходимо, чтобы оно подверглось реализации, чтобы было признано сперва в реалистическом,[34] затем в концептуалистическом[35] смысле самостоятельное его существование, для чего в числе необходимо было найти нечто, не заключающееся в его единицах. В собрании предметы объединяются, собрание является единством предметов, но вне сомнения существуют различного рода единства более или менее тесным сплочением объединенных единиц и различные роды единств имеют различные права на существование.

Сам Аристотель различает два рода единств[35]: одно через себя (unum per se), другое случайное (per accidens). Тело человеческое является таким unum per se в силу связности его членов.

Другим основанием является родовое отношение. Индивидуум, или вид, принадлежащие к одному роду, образуют тогда тоже единство первого рода. Такое же единство дает неделимое, образующее единицу, производящую число.

Здесь следует отметить, что Аристотель, как и в других случаях, не отказывает, что перечисленные им типы единственные, он никогда не стремится к построению системы, но пользуется методом умозрительно-наблюдательным.[37]

Каким же единством в глазах Аристотеля является число?

Несмотря на все старания схоластиков-реалистов выставить авторитет Аристотеля на своей стороне, Аристотель здесь должен быть признан номиналистом.

Число, как собрание единиц, должно быть признано акциденциальным единством, а такое единство не обладает реальным существованием, оно не находится вне нашего разума.

Другие более определенно высказывают чисто-номиналистическое воззрение на число, по которому число будет единством per accidens представляет лишь вещь разума (ens rationis).

Реалисты опровергают это мнение указанием, что семь планет остаются семью планетами, хотя бы никто о них и не думал, что сказать: „вещей много“ и таким образом утверждать их численно—это значит признать их различными—но такими они тогда признаются и вне нашего разума; наконец, считать—это не делать число, а только определить, каково оно.

§ 5. Абстрактное и конкретное число.

Проблема о существовании числа вполне аналогична проблеме об универсалях и получает в схоластике решение, примиряющее враждующие стороны, хотя число вовсе не фигурирует, как универсаль. Но самого Аристотеля интересовала проблема, совершенно не входящая в область схоластических исследований: „могут ли числа быть

---

[34] Реалисты приписывают универсалям (общим понятиям) реальное существование (Ансельм. Шампо, Бернард Шартрский).

Номиналисты — признают только символическ. их значение.

У позднейших схоластиков, у Фомы Акв. компромиссное решение.

[35] Концептуалисты. Универсали находятся в душе, но при этом не слово или символ, а ее модус.

Это мировоззрение берет верх и его придерживаются рационалисты. К концептуалистам примитивного типа можно отнести и Абеляра. Remusat. Abelard t. I, II. Paris 1845, (так-же) Haureau, Prantl и др.

[37] О методе Аристотеля, см. Biese.

признаны идеями" [38]. Могут ли они быть отнесены к умопостигаемому Платоновскому миру, представившему по существу переработку философской мыслью политеистического мира богов, отвергаемого христианством?

Чисто платоновское мировоззрение отличается от платоновско-пифагорейского именно тем, что идеи пополняются в нем числами. По словам Аристотеля пифагорейцы мыслили числа пространственно. Числа платоно-пифагорейские, так называемые идеальные числа, отличаются от математических, для античных мыслителей всегда конкретных, как идея отличается от ее отображения в мире материи, но вместе с тем они отличаются и от абстрактных чисел, совершенно чуждых античной мысли, совершенно так же, как идеи Платона отличаются от схоластических универсалей.

Аристотелевское опровержение реального существования таких идеальных чисел [39] основывается на том, что в мире идей каждая единица должна быть индивидуализирована, в мире идей единицы поэтому не могут быть однородны, но каждая должна быть образцом, как идея, а при таком положении не может уже образоваться число.

Вследствие же того число таким образом приходится спустить вниз, оно может быть только конкретным числом.

И не идеальное число Платона, а это конкретное число Аристотеля, состоящее по его словам из смешиваемых и однородных, но обязательно конкретных единиц, эволюционируется в схоластической мысли в абстрактное, состоящее тоже из смешиваемых и однородных, но уже абстрактных единиц.

Еще Альберт Великий [40] раздваивает число, отделяя формальное, акциденциальное от абстрактного, из которых первое, приложенное к вещам, остается в них, а последнее переводится в душу.

Если мы имеем пять вещей, то число три, приложенное к трем вещам, обязательно должно рассматриваться, как часть пяти, между тем, как абстрактное число, ему соответствующее, должно рассматриваться вполне самостоятельно, а не как часть объемлющего его числа.

Так как вещей может быть не пять, а семь, девять и т. д., то возникает странная мысль рассматривать приложенное число всегда, как часть восходящего над ним числа, и наконец, наибольшего конкретного числа, которое утверждается с отрицанием, согласно Аристотелю, актуально-бесконечного.

Здесь схоластическая мысль приближается к точке зрения современных логистиков, определяющих конечное число бесконечным. [41]

---

[38] Met. Lib. XI cap. VI.

Об идеальных числах Платона см. L. Brunschwigg'a. Les étapes de la philosophie mathematique. Paris. Alcan. 1912.

[39] Там же.

[40] Альберт Великий (1193 — 1280).

Haureau. La phil. sul—XII, cah. XVII.

[41] Г. Кантор. Кутюра. Принципы математики.

Внедряясь глубоко в Анализ абстрактных понятий, схоластика разделяет два понятия единства: одно трансцендентное, отвечающее вещи в себе (unum quod convertitur cum ente по Колонне), и единство, как принцип числа. Одно определяется как неделимое, отделенное от других вещей, т. е. отрицательно. Другое определяется положительно, численно. При таком отделении трансцендентного единства от численного, единица впервые выступает как численная определенность, как первое число. Трансцендентное единство схоластиков не следует смешивать с сингулярным классом тожеств. трансценд. и числового единства.

Тождество трансценд. и числового единства см. Suarez XV Areolus, Cupreolus (in 2 dist. 18) Ocham (in 4q.4) u quodib. 4 q. 29—33, 7q . 25 также Albertus de Sax. I Phys. gr.

Против этого Фома S. Thom. S. T. 3 par. q, 11 art. 2 in 4 dis. 2 art. 9. Alb. Mag. 1. Phys. t. 104. Soncin 5 Met. 2, а также Durandus, Mauronius, Hervaeus и другие.

Но бесспорно, что это половинчатое признание реального числа, т. е. признание реальности приложенного по нашей терминологии конкретного числа, не устраняет всех затруднений. Как только что указано, с признанием реальности только приложенных чисел ставится высшая граница для реальных чисел.

Но вместе с тем открывается и брешь в другом месте, через которую входит отвергаемая Аристотелем бесконечность.

Получается актуальная бесконечность — пар троек, четверок. Если существует пара камней и пара людей, то есть и пары пар и т. д. до бесконечности.

Один выход из этого затруднения—признать реальность абстрактного числа, признать то, что одно и то же два заключается и в паре камней и паре людей и, наконец, в паре пар.

Но некоторые схоластики находят другую лазейку, пара разнородных пар уже не признается парой, для такой пары не усматривается числового единства, за ней признается только единство трансцендентное.[42]

Точно таким же образом разрешается вопрос и о рефлективности[43] числа, чуждой реальным вещам.

Свойство это состоит в том, что операция, произведение которой над элементами a, b, c... дает A, B, C..., будучи приложено к A, B, C дает A_1, B_1, C_1... той же совокупности.

Здесь схоластическая мысль проходит около современной идеи группы:[44] группой, относящейся к операции Ω, в современном смысле называется совокупность объектов, что операции Ω, произведенная над несколькими из них, дает объект той же совокупности.

Нет белизны белизны, но пара пар, такое же число, как и просто пара. Это, конечно, верно для абстрактных чисел. Но для чисел приложенных это не верно и приходится возражать, что две пары уже не число, а только множество, связанное не числовым, а только трансцендентным единством.

§ 6. Реальность числа.

Схоластический спор о реальности числа дает начало арифметизации Математики.

За непрерывным количеством всегда понимаемого пространственно признается безусловная реальность и судьба дискретного числа иногда ставится в зависимость от решения вопроса, представляет ли число вид количества.[45]

Если за существенный признак количества признать с Фомой Аквинатом упорядоченную распространенность частей, то такой признак будет принадлежать, как непрерывному, так и дискретному количеству, видовое различие для первого будет состоять в связности частей, согласно аристотелевскому определению непрерывности, для второго в раздельности их.

Но на это возражают: распространенность в частях числа не простая, как это должно было быть. Части числа—это единицы, из которых число состоит. Эти единицы не только части целого, но обладают

---

[42], [43] Soncinas. Met. Lib. X. Q. VIII.

[44] Об абстрактном понятии группы, см. Кутюра. Принципы Математики. Изд. Карбасникова.

[45] Guerinois. De praedic. Quant. art. V.

не только свойствами целого, как например части площади, но содержат больше, чем целое, это сущности, заполняемые некоторым содержанием.

Это возражение в свою очередь отбивается указанием возможности двух точек зрения на единицы; образующее число, которое можно рассматривать как полные и цельные объекты и как неполные, абстрактованные от всех свойств, не содержащихся в целом. Эта последняя точка зрения и имеет место при образовании чисел.

Как ни стараются полностью использовать аристотелевский авторитет для укрепления своей позиции, Аристотель очень туго поддается их комментированию, ибо он остается античным мыслителем, чуждым всякой арифметизации.

Для него число, как он сам резко выражается, не единое, а куча.[46]

Это только схоластическая мысль настаивает на необходимости этого цемента, склеивающего разрозненные многие, и проектирует его в реальный мир. Фома подчеркивает, что двойственность не две единицы, ибо в противном случае нечто, составленное из двух единиц, иначе, число два не было бы сущностью самой по себе и истинной, а только случайной, как то, что накопляется.

В числе имеет место то, чего нет в куче, которая едина случайно, но то, что есть в человеке, единство которого отрицает душа.

Проблема о реальности числа претворяется таким образом в проблему о реальности единств совокупностей предметов и тожества этих единств совокупностям.

Проблема о числе приводит схоластику к ее старой проблеме, проблеме Росцелина[47] о различении целого и частей, объединяемых этим целым.

Соединение в сложном в действительности ли различно от его частей?

An unio in composito sit realiter distincta ab extremis?

Соединение элементов в целом не только ли мыслится, как единое целое, а в действительности в этом соединении элементы остаются такими же внешними друг к другу, как это имеет место до их соединения[49]. Аргументация против: все признаки реального различения присущи частям. Они раздельны: одна погибает при сохранении другой. Если части отличаются от целого, которое наряду с частями обладает реальным существованием, то адэкватно или неадэкватно. Первое невозможно, т. е. невозможно отличие адэкватное полное, так как части входят в целое. Второе невозможно, ибо деление было бы тогда неполным, целое делилось бы не только на то, что мы принимаем за части.

Другая аргументация: если кроме частей (a, b) еще имеем и некоторую форму целостности c, прибавление которой к a и b дает

---

[46] Aristotelis. 8 Met. Cap. 3, также Phys. Cap. 3.

[47] О Росцелине. См. сочин. Абеляра. Remusat Abelard.

[48] Отметим чисто схоласт. проблему: о том, следует ли деление относить к материальному объекту или к его количеству (это слово употребляется в смысле пространства). Наряду с отрицательным решением (Suarez, Fonseca) и положительным (Soncinas, Capreolus. Caetenus, Sanschez) еще имеются и средние компромиссные. Некоторые томисты думают, что хотя части и относятся к вещи, но само их получение невозможно без пространства (Mailhed, Goudin), другие же видят роль пространства в создании порядка между частями (Casma de Len). См. учение Лейбница о пространстве, как порядке вещей.

[49] Suarez. Metaphys. Disputationes tomi duo. Venetiis. 1619. Disp XLIV, XLV.

целое, то все три элемента (a, b, c) требуют еще новой формы целостности d и таким образом открывается невозможный бесконечный процесс.

§ 7. Схоластическое координальное и ординальное число.

Здесь скоттическое мировоззрение реализует то, что томисты относят к разуму. Соединение формы и материи не есть только форма и материя, разделение их уничтожает не каждую из них, а их соединение. Вместе—simul[50]—это так сказать тот цемент, который склеивает разнородные элементы и обладает тоже реальностью, хотя может быть в меньшей степени, чем склеиваемые им элементы.

Но именно такой цемент и отвергается томистами. Соединение формы и материала это только материал и форма и ничего более. Связь идет от самой материи вовсе не индиферентной к форме, но только благодаря этой форме и существующей, причем отвечающей вполне определенной форме.

Соединение материала и формы объясняется действием объединяющих факторов: активного со стороны агента, производящего этот факт, и пассивного со стороны материи[51], которая представляет расположение (appetitus) материи.

В этих исследованиях Схоластика углубляется в анализ различных объединенных совокупностей соответственно различию числового и трансцендентного единства, она различает трансцендентное и числовое множество, первое просто множество, второе число.

Нельзя сказать, что схоластические понятия числа и множества вполне отвечают современным.

Если отбросить особые по своим свойствам трансфинитные[52] числа, то характерный для чисел признак конечности оказывается не присущим множеству; более того, рассматриваемые современной Математикой множества именно бесконечные множества[53].

Схоластическое множество (multitudo)[54] тоже может быть бесконечным (хотя потенциально), число же всегда конечно. Но различие между множеством и числом в том, что первое является родом, второе видом и ниже его.

Видовая разность не в способе образования совокупности элементов, чем определяются современные множества, а в характере самых элементов. Схоластическое множество относится к неоднородным элементам, а число к однородным.

Так как схоластика реальным признает только конкретное число, по схоластической терминологии приложенное, то число может быть в пяти человеках, в шести камнях, в семи звездах и т. д. Но два человека вместе с двумя камнями образуют только множество с трансцендентным, а не числовым единством. Отметим, что кроме

О различении соединения и составных его элементов. За реальное различие Suarez, Arriaga, против Conimbricensis. Об этом вопросе подробно Knittel. Aristoteles curiosus. Progae 1682.

[50] О материи и форме. См. Aristoteles. Metaphisica. О нераздельности формы и материи. Alb. Mag. i Phys. I trac. II.

[51] Об учении Фомы о материи. См. Haureau. La philosophie scolastique, XII. Ch. XX p. 104.

[52] Жегалкин. Трансфинитные числа.

[53] Кантор. Учение о множествах. Новые идеи в Математике. Сб. 6. Ueber die unendlich lineare Punktmannigfaltigkeiten Math. Ann. B. 15—21—23. 1879-1884.

[54] О multitudo. Аристотель, Met. Lib. XII. Cap. I.

однородных единиц большинство схоластиков выставляет еще другое условие—материальность составляющих число единиц.

В схоластике мы видим также борьбу количественной и порядковой точек зрения на число, но теории, защищающие первую точку зрения, далеко не соответствуют современной количественной теории чисел.

Некоторые схоластики, но не все, мысля сущность числа с помощью обычной аристотеле - схоластической схемы (форма - материя), ищут форму чисел[55], т. е. то, что дает ему актуальное существование, мысля вместе с тем и потенциальное, незаконченнное бытие, в роде бытия материи, не наделенной формой. По мнению одних эта форма дается тем, что все определяющие числом вещи мыслятся соединенно в одном коитинууме[56]. Пять камней потому или с того момента пять, как мыслится (составляющими как бы один непрерывный камень, разделенный на части). Это, конечно, количественная точка зрения. Число мыслителя в ней вне порядка составляющих его элементов. Но в то время, как современная количественная теория чисел идет от дискретного множества к коитинууму, здесь путь как раз обратный: коитинуум кладется в основу дискретной величины, которая рассматривается как нечто производное, как соединение дискретной материи с непрерывной формой.

По мнению же других формой числа является последняя единица[57]. Число завершается тогда, когда кончается счет, который кончается этой последней единицей.

Это, конечно, порядковая точка зрения.

Против первой, т. е. количественной точки зрения, приводится явная противоположность дискретного и непрерывного, при которой второе ни в коем случае не может служить формой первого.

Указывается также на потенциальность такой непрерывности, ибо ее в действительности нет, так как камни все-таки остаются разделенными и непрерывность возникает только при действительном их сплавлении.

Против второй выдвигается независимость числа от порядка элементов (a, b, c, d); ведь такое же число составляют (a, b, c, d) d, a, b, c и указывается также, что формой числа не может явиться последняя единица вследствие того, что первое и последнее только в уме, что вне его только их расположение. В числе нет последней единицы. Нет ее ни во времени, ни в природе, ни в смысле конечной цели, ни по достоинству.

Последнюю единицу можно сравнить только с крышей дома, которую ни в коем случае нельзя признать за ее форму.

Отметим, что первый взгляд отвечает возражению на измерение, как на сущность количеств, второе же томистическому взгляду, берущему на место измерения распорядок. Согласно первому число обнаруживается измерением единиц, согласно второму расположением частей, при чем в обоих случаях схоластика не может освободиться от пространственного мышления.

Первый взгляд ближе к Аристотелю, который определяет число, как множество, измеренное единицей[59]. Единица здесь является мерой и, как уже выше заметили, ни в коем случае не тело.

---

[55] Soncinatis. Questiones metaphisicales acutissimae, 1622, Lib. X.

[56] Sonc. Lib. X. Q. X. За это прив. места из 10 кн. Метафизики Аристотеля и Thom. 4 Met.

[57] Sonc. Lib. X. Q. VIII. За это прив. место из 8 кн. Метафизик Аристотеля.

[58] Там же.

[59] Arist. Met. Lib. IX, cap. VI.

Отсюда вытекает, что множества различных родов не те же; что для Аристотеля, как уже было отмечено, существуют только конкретные числа: пять камней — другое число, чем пять человек.

Ординальная точка зрения здесь, конечно, шагает вперед в направлении к абстрактным числам.

§ 8. Метафизика нуля.

Эмбриональная жизнь математического нуля наблюдается в схоластических исследованиях о творении. Античная Анаксагорова[60] аксиома. „Из ничего не происходит ничего", отвергает превращение нуля во что-нибудь, включение его в ряд чисел. Схоластики, конечно, в целях защиты основных христианских догматов должны выступить во всем своем всеоружии против этой языческой аксиомы, отвергающей возможность божественного творения из ничего.

Сперва средневековая мысль старается обойти это положение, устанавливая творения без нарушения этой аксиомы, которой дается объяснение не в смысле отвергания творчества, а в смысле лишь невозможности перехода ничто во что-нибудь.

Так по св. Ансельму[61] при творении ничто не переходит в что-нибудь, а сперва — ничто, а затем создается что-нибудь.

Но этим средневековая мысль не удовлетворяется. Она постоянно возвращается к гнетущей ее идее — предваряющей божественное творение материи. То, что становится, должно быть раньше возможным. Но истинно возможным является только чистая потенция, т. е. материя.

Фоме Аквинату[62] приходит на мысль заменить в настоящем случае аристотелевскую метафизическую возможность — абстрактной, чисто логической.

Только то, что совершается естественными силами, сперва фигурирует в виде такой метафизической возможности, но то, что происходит сверхъестественно, что приводится к бытию только одной силой и называется возможным только поскольку может быть представляемо.

Из этих метафизических размышлений выходит ничто, как возможность чего-либо, родится взгляд на нуль, как на член ряда, к которому принадлежат натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5.....

Только в этом потенциальном существовании получается разрешение того противоречия, которое отмечается еще Фредегениусом[63] в форме, которая может показаться на первый взгляд нелепой. „Всякое конечное имя что-нибудь обозначает, как человек, камень, дерево, то и ничто что-нибудь обозначает. Таким образом ничто только тогда может мыслиться, когда оно уже есть что-нибудь".

Нуль таким образом только возможность, но реализующая абстракции средневековая мысль подымает эту возможность высоко над плоскостью чисто логического бытия.

Другие средневековые возражения против творения являются метафизическими представителями следующих математических возражений против признания нуля числом:

1) не существует также числа, от прибавления которого к А получалось бы А, но таков нуль $A + O = A$, поэтому нуль не число;

---

[60] Об Анаксагоре см. Zeller. Geschichte d. Ph. также Таниери. Первые шаги греческой науки

[61] Ансельм. Patrologia Migne. 1853, t. CLVIII.

[62] Sonc. Met. Lib. V. Q. XVI.

2) в области непрерывных количеств — нуль ведет к признанию некоторой величины, непосредственно стоящей за нулем, так как возрастание с нуля дает противоречие: нуль является тогда и ничем и уже чем-то: отрицанием количеств и его началом.

Первое метафизическое возражение против творения,[64] если что нибудь становится чем-нибудь, наприм. белый человек становится черным, то что-нибудь в нем бывшее должно оставаться. Если признать, что из ничего становится что-нибудь, ничего или часть „ничто" должно остаться в чем-нибудь, так что последнее затем является и чем-нибудь и ничем.

Схоластика углубляется в тонкое различие творчества и рождения (Creatio, generatio)[65]. Творение это производство из ничего, а рождение из чего-нибудь. Рождение это выведение формы из потенции материи, и материя должна некоторым образом измениться, чтобы восприять всю сущность формы.

В позднейшую эпоху схоластическая мысль приходит к учению о четырех моментах[66]: primum esse et primum non esse, ultimum esse et ultimum non esse—это метафизические предки числителей и знаменателей Ньютоновских первых и последних частных. Primum esse (первое бытье) это положительный момент, внутренний, в котором вещь есть и только что ее не было; ultimum non esse (последнее небытие) внешний отрицательный, в котором вещи нет и тотчас после этого будет, ultimum esse (последнее бытие), в котором вещь есть, тотчас после этого ее нет, primum non esse (первое небытие) вещь не есть, а тотчас была.

§ 9. Метафизика отрицательного.

Посмотрим еще, каким образом схоластическая мысль заходит за нуль, т. е. в область отрицательных величин.

Вспомним, что античная мысль по преимуществу дуалистична, в то время, как современная монистична. Все античные мыслители[67] выставляют принципами вещей противоположности. Даже элеаты, объявляя все единым и неподвижным, вводят в него противоположности, как причины, объясняющие различные явления: Парменид холод и тепло, Фалес и Анаксимен — грубое и тонкое. Пифагор — равное и неравное Эмпедокл — любовь и вражду, Гераклит — сухое и мокрое, Демокрит— наполненное и пустое. Аристотель идет еще дальше: по его мнению все явления природы происходят из противоположностей и переходят в противоположности и поэтому и принципы их противоположности; это основное Аристотелевское положение резко подчеркивает различие между античным и современным мировоззрением.

Первый родоначальник а,— а и нуля — аристотелевская противоположность со средним.[68] Прежде всего Аристотель резко подчеркивает различие между противоречием и противоположностью.

Он отмечает, что не может быть среднего между утверждением и отрицанием, в то время, как противоположности могут допускать среднее.

---

[64] Конечно эти возражения создались арабскими, а не христианскими схоластиками.

[65] Generatio следует отличать от ortus (тому и другому отвечает русское слово рождение) об ortus см. Aristotelis Naturales Ausculationes. Lib. VIII.

[66] Soncin. Lib XII. Q. XV—XVI.

[66] Об этом см. Soto. Q. VI q. 3. Werner, t. IV. Abh. 2. I. Abt.

[67] Об философах до Аристотеля см. в Метафизике самого Аристотеля. Также Zeller. G. d. Philosophie.

[68] Учение Аристотеля о против. Arist. Met. Lib. X. cap. IV. О средних, cap. V.

Следует сказать могут, так как по Аристотелю есть противоположности и без среднего.

Когда же существует среднее противоположностей?

Только тогда, когда, говорит Аристотель [69], среднее (A, B) принадлежит к одному роду с A и B.

Это следует понимать так. Можно утверждать существование среднего только в том случае, если составив по A, B понятие этого среднего, мы будем в состоянии его отнести вместе с A и B к одному роду.

Для нашей цели важно указать не положение Аристотеля о простоте экстремов [70], являющихся простыми началами и о необходимой сложности среднего, которое должно содержать каким-то образом противоположности (в роде Гегелевского [71] синтеза, соединяющего тезис с антитезисом).

Что больше P и меньше Q, должно содержать P и Q.

Как A, переходя к B, принадлежит всегда к одному роду Ω становится C, которое не A и не B и вместе с тем A и B, вот проблема в сущности своей представляющая проблему об отрицательном числе и нуле.

Другим предком отрицательного числа является чисто антологическое понятие — лишения (privatio nihil) [72].

На более высоких стадиях развития схоластики это вполне определенно не ничто (nihil). Из субъекта изъята некоторая акциденция A, при этом естественно мыслится состояние субъекта иное, чем то, которое имеет место при ее наличности.

Противоположение лишения (privatio) обладанию (habitus) соответствует противоположности отрицательного положительному и проблема о переходе лишения к обладанию (a privatione ad habitum) является метафизическим представителем математической проблемы о непрерывно изменяющейся величине, проходящей от отрицательных значений через нуль к положительным.

У самого Аристотеля лишение скорее, как реализованный нуль. Его положение: от обладания к лишению может быть изменение, но от лишения к обладанию не может быть, сводится к Анаксагорову постулату: Ex nihilo nihil fit.

В исследованиях возможности перехода от лишения к наличности (regressus a privatione ad habitum) вскрывается различие между двумя родами лишений: одного, при котором нет ничего положительного, каково лишение света и слепота зрения, другого, при котором имеется положительная форма, соединенная с лишением другой. Примером последнего приводится не тьма, а чернота, как отсутствие белизны. Здесь не только отсутствие белизны, но и присутствие другого цвета. Только лишение в этом втором смысле признается начальным членом (terminus a quo) трансмутации, что соответствует переходу от отрицательного к положительному.

Та же мысль выражается еще иначе: признается возможность перехода лишения в наличность при условии соединения лишения с противной формой, примером чего может служить переход холода в тепло. В определениях Фомы Аквинского [73] лишение является уже вполне определенно метафизическим представителем отрицательных величин. Materia nunquam est sine privatione — материя никогда не бывает без

[69] Там же, cap. VI.
[70] Arist. Met. Lib. X. cap. IV, V.
[71] Гегель, Логика, см. также Куно-Фишер. История новой философии.
[72] Arist. Phys. I cap. VII. Met. Lib. IV. Tiedemann s. 263.
[73] S. Thom. Aq. Opusc. 31 in. Arist. Met. Lib. XII. c. 2.

лишения. Privatio non est aliqua aptitudo ad formam vel inchoatio formae vel aliquod principium imperfectum activum, ut quidem dicunt, sed ipsa carentia formae, vel contrarium formae, quod subsecro accidit—лишение не представляет какое-либо прилаживание к форме или начало ее или какой-либо вообще несовершенный активный принцип, как некоторые говорят, но отказ от формы или противное формы присущее субъекту.

Материя то, что может быть чем-нибудь; это метафизический представитель $a=0$.

Лишение то, что не то, то должно быть $a<0$.

Форма — то через что становится что-нибудь действительным $a>0$.

Можно вполне ясно проследить влияние схоластических споров о лишении на эволюцию понятия об отрицательных величинах у натурфилософов эпохи Возрождения, мысль которых подымалась над уровнем схоластики, пускала глубоко туда свои корни.

Если Телезий рассматривает два элемента тепло и холод [74], [75] как различные величины, Кардан [76] уже признает одно только тепло, считая холод только лишением тепла. Очевидно понятие лишения должно пониматься здесь не в чисто аристотелевском смысле, а в схоластическом смысле, так как в первом случае возникает возражение, что лишение не принимает ни больше, ни меньше, в то время как холод может быть и больше и меньше.

Так как столько же основания считать холод лишением тепла, как тепло лишением холода, то тепло и холод лишением одного другого и в дальнейшем эволюционируются в относительные величины.

§ 10. Отношение.

Чтобы проследить в схоластике эмбрионы иррационального числа, следует сказать несколько слов о категории отношения в схоластике.

Аристотель в каждом отношении различает субъект, конечный член, основание [77] (subjectum, terminus, fundamentum). В отческом отношении субъект — отец A, конечный член сын B. Основания различаются: ближайшее и дальнейшее (proximum et remotum). В нашем примере ближайшим основанием является факт рождения отцом сына, дальнейшим — производительная способность отца (potentia genetiva).

Для математического отношения $A:B$, A субъект, B—конечный член, основанием является количество.

Альберт Великий, [78] кажется, первый подвергает глубокому исследованию четвертую аристотелевскую категорию. Он выдвигает проблему о реальности отношения. Куда следует отнести бытие отношений—к вещам или разуму?

Если признать, что величины или числа A, B существуют, то можно ли сказать, что и их отношение существует? При этом существование можно понимать в различном смысле и проблему можно шире: представляет ли отношение $A:B$ нечто большее, чем символ?

---

[74] Аристотель о холоде. De Coelo, Lib. IV.

[75] Телезий. О нем M. Carrière. Die phil. Weltanschanung der Reformationszeit. Stuttgart 1847. VII. s. 353 — 314.

[76] Кардан. Там же VI, s. 324 — 352.

[77] Arist. Categoriae, Cap. V.

[78] Alb. Mag. III, p. 207. Th. Aq. Opusc. 48.

Против реализации отношения говорит тот факт, что при уничтожении одного члена отношения, другой В не претерпевает никакого изменения. Если А отец, В сын, то между ними отношение отца к сыну. По смерти отца А сын остается неизмененным. Поэтому отношение его не находится в В. Таким же образом доказывается, что оно не находится и в А.

Альберт думает выйти из затруднения мысли отношения, как цепь с кольцами в А и В, находя возможным реализовать только эти кольца, а не всю цепь. То, что он называет связью их, он относит к разуму, а собственно отношение полагает в вещах и утверждает, что в приведенном выше случае такие кольца и в отце и в сыне, по смерти отца первое кольцо вместе с ним исчезает, но остается другое в В — сын сохраняет сходство с отцом. При таком воззрении А: В еще не является самостоятельным математическим объектом с тем же правом на существование, что А и В в отдельности каждое, без чего оно не может претвориться затем в число.

Если $A:B=3$, то во сколько А больше В (А в 3 раза больше В) первое кольцо, то во столько В меньше А (В в 3 раза меньше А) второе кольцо.

Фома Аквинский подробно исследует условия реальности отношений и находит следующие—необходимые, но недостаточные: субъект должен существовать, конечный член должен быть реально отличным от него, основание должно быть положительно и реально и различно в обоих членах отношения.

Он вместе с Аристотелем различает отношения: категорическое (Secundum esse) и условное[79] (Secundum dici). Первое относится к чистым терминам, оно может быть между всякими вещами, не предполагая особых условных обстоятельств, при которых только может иметь место.

Примерами может служит отношение тожеств и различия, относящиеся к категории субстанций, равенств и первенств (количество), подобия и неподобия (качества), причины и действия (потенции).

Все эти отношения ни от чего третьего не зависят, они всегда при всяких условиях имеют или не имеют места.

Примерами условного отношения служит отношение науки к познаваемому, движущегося к движению.

Категорическое отношение дает, кроме упомянутых выше трех условий, еще четвертое: реальное существование обоих членов отношения.

Отношение А:В теряет смысл, когда А и В не существуют.

Математическое отношение должно быть отнесено к категорическим.

А:В оба А и В постулируются существующими. А:О не имеет смысла, как и О:В.

Фома защищает реальность только категорического отношения. Равенство, неравенство, подобие даются и при отсутствии мыслящего существа, их воспринимающего.

Еще до Фомы, путем компромиссов, идет Авицена[80], признающий реальное бытие не за всем, а только за некоторыми отношениями.

Таким отношением он считает отчество, не перестающее существовать, хотя бы оно и не воспринималось бы душой. Таково же отношение: направо и налево.

---

[80] Авицена. Die Metaphysik. Avicennas enthaltend die Met. Theologia etc. übersetzt und erlautert von M. Hortz. Leipzig 1909. 10 Kap. 857.
Старое издание Avicenas Opera Yenetiis. 1523.

Именно за всеми отношениями, носителем которых является один субъект, Авицена признает реальное существование. Если А отец, В сын, то в В уже не отцовское, а сыновье отношение.

По современной терминологии это не комуттативные отношения. Комуттативные отношения подобия, равнения и т. д. Авиценой не относятся к реальным. Поэтому, с точки зрения Авицены, математическое отношение следовало бы признать реальным.

Но математическое отношение схоластика менее всего жалует. Обычно оно выставляется, как не выходящее из души отношение. Указывают[81], что вещь имеет бесконечное число отношений к своей половине, к трети, к четверти и таким образом является носителем актуальной бесконечности отношений.

В тесной связи с проблемой о реальности отношения стоит проблема: при одинаковом отношении А к В, С следует ли считать в А одно отношение[82] или несколько (АВ) (АС) (АД)... А отец В, С... сыновья, сколько в А отчеств.

Согласно Фоме только одно. Согласно Скотту много.

Переводя на плоскость математики:

можно-ли пропорцию $A:B = A:C$ при $B = C$ рассматривать, как тожество?

В этой постановке вопроса не спрашивается, есть-ли $A:B$ число, а только то, нельзя ли равенство отношений при равенстве членов рассматривать также как равенство чисел, для которых $A:B$ понимается так: число А то же, что В.

За проблемой о реальности отношения, получающим компромиссное решение стоит, другая проблема: о тожественности или различии членов отношения от самого отношения[83].

Фома Аквинский отделяет в сфере реального существования субъект от отношения, разделяя субъект на собственно субъект и лежащее в нем отношение. Херве[84], оставаясь при таком разделении, отвергает отношение, как составной элемент субъекта. Дюран[85] дает различные решения, смотря по тому, имеет ли он дело с логическим отношением, содержащимся только в понятиях (relatio praedicamentalis), или с реальным.

Для первого отношение не различается от субъекта, для второго такое различение имеет место и отношение отделяется от субъекта так, что последний остается без второго.

Для первого А понимается в более широком и более узком смысле. С более широкой точки зрения можно читать $A = A:1$.

Для второго это всегда невозможно.

Различаемость отношения от членов отношения Д. Скотт[86] доказывает на основании аксиомы: „каждая вещь различна от другой, которая может существовать без нее, не рождая противоречия“.

Так Платон отличается реально от Сократа, ибо нет противоречия, чтобы один существовал без другого.

Но существуют многие отношения, такие, что вещи, к которым они относятся, могут, не рождая противоречий, существовать без них. Так о каждой можно что-нибудь знать и не знать.

---

[81] За умножение Hurtado 15 Met. s. 10. Скотт. Scot. in 3 dis. 8 q. 1 против Thom. S. T. 3 p. q 35. a 5, см. также Knittel, Aristoteles curiosus 1682 ex libris Met. Q XLVIII.

[83] См. Guerinois. De Praed. Relat. Sonc. Lib V.

[84] Hervaeus Natalis+1323 Quodlie II q. 14 Buhle § 797.

[85] Wilhelmus Durandus + 1332. In Mag. Sent. I dist. 17 q. 3 q. Buhle § 806.

[86] In Mag. Sent II dist. I. q. 5 Buhle, s. 770.

Другое доказательство Д. Скотта основывается на аксиоме: ни одно конечное существо не может в себе содержать противоположные вещи без внутреннего различия от них. А содержит В и С противоположные друг другу, но при этом обязательно А отличается от В и от С.

Подобие и неподобие, равенство и неравенство с какими-либо вещами противоположны, но подобие В и неподобие С, равенство В и неравенство С могут находиться в одном субъекте А.

Отсюда следует, что А отлично от отношения подобия с В и от отношения подобия с С, от равенств с В и неравенств.

Вне сомнения, это признание самостоятельности А:В в направлении арифметизированного отношения.

§ 11. Иррациональное число, как отношение.[87]

У Эвклида математическое отношение это не число, это один из видов Аристотелевского отношения. Эвклид дает ему определение:

„Это взаимная некая зависимость двух однородных величин по их количеству“ [88].

Но определение это остается логически не действующим.

Рабочим является 5-е—тожественности отношений[89]. „Величины, говорится, суть в том же отношении, первое ко второй и третьей к четвертой, когда равнократные второй и четвертой, взятые по какому либо кратковanию, суть таковы, что попеременно каждая каждой или купно равны или купно больше или купно меньше“.

На алгебраическом языке

$$a:b=c:d$$

если при всяких целых числах, т. е. таких, что

$$\begin{array}{lcl} ma > nb & \text{также} & mc > nd \\ ma < nb & „ & mc < nd \\ ma = nb & „ & mc = nd \end{array}$$

Для Эвклида, как мы уже выше заметили, число—это собрание единиц, так, что и дробь для него не является еще числом. Между геометрическими величинами и числами еще нет взаимно-однозначного соответствия; отношение двух отрезков, площадей или объемов a : b еще не сводится к отношению двух чисел.

Эвклиду приходится строить две теории пропорций величин в 5-й книге и чисел в 7-й.

С нашей точки зрения ему приходится повторяться. Но это только с нашей точки зрения, а не с точки зрения самого Эвклида. У Эвклида не только нет взаимооднородного соответствия между геометрическими величинами и характеризующими их числами, у него нет и идеи, объемлющей видовые понятия геометрической величины и числа, которое является результатом дальнейшей эволюции математической мысли.

Чисто формальная точка зрения противна Эвклиду, определение совокупностью формальных законов ему чуждо.

[87] Более подробно об этом смотри мою работу: Из прошлого 5-ой книги Начал Эвклида. Мат. Образ. за 1916 г. №№ 7—8.

[88] Эвклид. Начало 5 книги. Опред. 3.

[89] Там-же, определение 5.

Число и прямолинейный отрезок (в его терминологии прямую) он не решается отнести к одному классу в силу тожественности формальных законов, которым подчиняются соответствующие операции над ними.

Величины в I книге (см. акс. 8) взаимно налагаются.

Аксиомы 1, 2, 3: [90]

„Величины, равные одной и той же величине, равны между собой".

„Если к величинам равным придадим равные, то получим равные суммы".

„Если от величин равных отнимем равные, то получим равные" и т. д. все отношения не к числам, а к геометрическим величинам, т. е. к классу, в который отнюдь не входят числа.

Что является в высокой степени интересным — это то, что эти и другие аксиомы лежат в основе арифметики [91] Эвклида, так как все арифметические действия над целыми числами Эвклид сводит к действиям над особым классом отрезков, составленных из одного определенного, отвечающего единице.

Между отрезками этого класса и целыми числами существует взаимно-однозначное соответствие и оно позволяет Эвклиду, идя в обратном современному направлении, свести не геометрию к арифметике, а арифметику к геометрии.

В дальнейшей эволюции математической мысли отношение становится числом. Оба понятия сливаются между собой потому, что законы соответственных формальных операций над ними оказываются теми же. Здесь начинается тот математический формализм, который в конечном итоге одерживает окончательную победу над противоположным схоластическим направлением, в котором центр тяжести кладется в анализ понятия, а не в формальных операциях.

Схоластика резко противополагает число отношению.

Число это абсолютная акциденция. Число — количество, а как таковое, согласно Аристотелю, формально абсолютно.

О количестве не говорится, как относящемся к чему либо, но о количестве чего-либо.

Нельзя сказать, что число берется относительно единицы, как измеренное относительно меры, так как число не само отношение, а то, на чем последнее основывается 5 и 5:1 представляют различные сущности. Если ввести символ, то $5 = 5:1$ во всяком случае не абсолютное тожество, 5 согласно более поздней терминологии число-индекс [92] отношение 5:1 как 2 отличается 6:3, при чем такой индекс не всегда существует. Он не существует для случая отношения величин несоизмеримых, например, диагонали и стороны квадрата.

Только у Арно [93] отношение становится величиной, по правде еще с эпитетом относительной, так что количеству отказывается в безусловной абсолютности.

Но Ньютон уже всякое число рассматривает, как отношение.

„Под числом, говорит Ньютон [94], разумеют не собрание многих единиц, а скорее отношение абстрактное одного количества к другому того же рода, которое рассматривается, как единица".

---

[90] Эвклид. Начала.

[91] Эвклидовы начала, пер. Петрушевского.

[92] См. (Arnauld) Nouveaux Eléments de Géométrie.

[93] Арно - Antoune Arnauld (1632 — 1684) вместе с Николем составил знаменитую Порт - Роялевскую логику (L'art de penser).

[94] Newton. Arithmétique universelle par Beaudeaux. Paris 1902.

Для того, чтобы и всякое отношение оказалось числом, необходима была арифметизация.

Геометрия, которая через Бертрана[95] шла к Лежандру[96], уже постулирующему взаимнооднозначное соответствие между числами и геометрическими величинами. Для Лежандра всякое отношение — число рациональное или иррациональное.

Теория геометрической пропорции у него сливается с арифметической.

Можно указать следующую схему эволюции мысли, ведущей к иррациональному числу из Эвклидова отношения:

1) Реализация отношения, отношение отвоевывает себе право существования, как члены отношения, так же, как число.

2) Оно становится количеством — относительной величиной, не будучи еще числом.

3) Всякое число становится отношением, всякое отношение числом.

Д. Мордухай-Болтовской.

III. Первые шаги буквенной Алгебры.

(Конец XVI века).

§ 1. Числовая и буквенная Алгебра с методической точки зрения.

Обычно начинают изучение Алгебры с буквенных формул, сперва учатся определять их числовое значение, затем производить над ними действия, а числовая Алгебра является уже позже.[1]

Но мне представляется это методической ошибкой. Решение числового уравнения усваивается целиком гораздо легче, чем решение уравнения буквенного. Обозначение неизвестного каким-либо символом более простая идея, чем обозначение символами различных величин, предполагаемых заданными, но тем не менее имеющими произвольное значение.

Каждый из учителей знает то затруднение, которое представляет при решении буквенных уравнений признание членов a^3x, $2a^3x$, ax подобными в противоречии с раньше устанавливаемым понятием подобия.

---

[95] L. Bertrand. Devellopement nouveau de la partié élémentaire des Mathématiques. A Genève 1788.

[96] Legendre. Eléménts de Géométrie; у Вольфа иррациональное число, как отношение линии к линии (Ontologia § 405), но у него еще не всякое отношение линий число.

[1] Многими сознается, что центральной проблемой Алгебры является уравнение; в этом случае предпосылается введение, где говорится сперва о численных, затем тотчас о буквенных уравнениях.

См. Lacroix. Elements d'Algèbre Поздн. издание Prouhet. Paris. 1879.

У Briot—Leçons d'Algèbre—эта часть развита больше.

К числовой Алгебре следует подводить уже при решении арифметических задач, согласно историческому ходу Алгебры, представляя решение сперва в реторической[2] затем синкопированной[3] и, наконец, символической форме, но производя те именно операции, которыми задачи эти решает Алгебра.

Привожу примеры:[4]

10 грифелей	и 20	карандашей	стоят	1	р. 20	к.
10 „	и 25	„	„	1	„ 45	„

Что стоит грифель и что стоит карандаш?

Решение в форме наглядно-реторической: так как во втором случае приходится платить больше и притом на 1 р. 45 к.—1 р. 20 к.= =25 к., то это потому, что было 25—20=5 лишних карандашей. Значит 5 карандашей стоят 25 к., а один 25 : 5 = 5 к.

От этой формы легко перейти к форме

10 гр.+20 кр.=120
10 гр.+25 кр.=145

и путем вычитания получить

5 кр.=25 коп.

и, наконец, в форме чисто символической:

$$\begin{aligned} 10x + 20y &= 120 \\ 10x + 25y &= 145 \\ \hline 5y &= 25 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Следующим типом являются задачи, определяемые уравнениями:

$$\begin{aligned} kax + b_1 y &= c \\ ax + b_2 y &= d \end{aligned}$$

25	мер	овса	и 20	пудов	сена	стоит	16 р. 50 к.
5	„	„	и 12	„	„	„	4 р. 90 к.

Устанавливается, что 25 мер овса и 60 пудов сена стоят 24 р. 50 к., а разность, т. е. 40 пуд. сена стоят 8 руб., поэтому 1 пуд.—20 к. От наглядно-реторического решения переходим к символическому решению уравнений:

$$\begin{aligned} 25x + 20y &= 1650 \\ 5x + 12y &= 490 \end{aligned}$$

обычными приемами.

---

[2] Словесная алгебра.

[3] Полусимволическая,

Эйлер в Anleitung zur Algebra, Petersburg. 1802, излагая свойства чисел, уже при сложении и вычитании пользуется буквами, для „представления результатов в общем виде". Аналогичным образом поступает и Глаголев в элементарной Алгебре. Москва, 1907, и Борель-Штеккель в элементарной математике, изд. Матезис.

Schubert. Element. Arithmetik und Algebra, Leipzig, 1910, указывает наряду с буквенными выражениями и уравнения. Давидов, Малинин и другие начинначинают прямо с буквенных выражений.

[4] Уравнения, к которым приводятся обычно арифметические задачи, следующие: $y - c = m(x + c)$ (перекладывание см. Егоров, зад. 1317), $ax + by = c$, $y = x + d$ (деление на неравные части, зад. 1320), $ax + by = c$, $y = mx$ (т. е. части, из которых одна кратная другой, 1491 и д.), $x + y = s$; $y : x = m : n$ (деление, зад. 1521).

Наконец приходим к типу, отвечающему общему случаю:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

За 7 груш и 11 яблоков уплочено 29 к.
„ 9 „ и 12 „ „ 33 „

Сколько стоит груша и яблоко?

Следует отметить еще одно затруднение при прохождении буквенной Алгебры.

Под a, b, c... разумеются числа [5].

Но какие числа? В иных случаях самый ход действий предполагает, что a, b, c... обязательно целые числа, когда, например, находим общий наибольший делитель $50\,a^3\,b^4\,c^4$ и $75\,a^2\,b^3\,c^2$, объявляя его равным $25\,a^2\,b^3\,c^2$. В других же случаях, например, при определении числовых значений формулы, a, b, c имеют вообще и дробные рациональные значения. В дальнейшем a, b, c — уже какие угодно числа, как рациональные, так и иррациональные.

§ 2. Величины различных измерений старой Алгебры.

Методические изыскания должны итти параллельно историческим. В иных случаях, хотя далеко не всегда, история может кой чему научить методиста. Я подчеркиваю: не всегда, так как великий биогенетический закон, приравнивающий филогенетическое [6] развитие онтогенетическому,[7]— это только грубое приближение. Бесспорно, что кое-что в Алгебре давалось трудно алгебраистам XVI века по тем же причинам, почему и ученикам оно трудно усваевается.

Так, повторяю, идея числовой алгебры проще, а потому и хронологически — Алгебра числовая предшествовала буквенной.

Но прибавлю, что много затруднений возникло и от основного взгляда на Алгебру, на понимание смысла ее символов, при чем через это понимание теперь, при арифметизированной с самых азов Алгебре, ученик не должен проходить.

Когда предлагается буквенное уравнение

$$ax^2 + bx = c,$$

что означают буквы a, b, c и x (то, что в старой алгебре называлось характеристиками)? У нас такой ответ: a, b, c.. известные числа, x—неизвестное число. Но если мы возвратимся к XVII и XVIII вв., то увидим другое положение.

Алгебраическая величина — это класс, объемлющий два вида непрерывных величин, каковыми являются геометрические величины: длины, поверхности, объемы и дискретные, т. е. числа, при чем понятие числа не идет дальше рациональной области,[10] a b понимается,

---

[5] См. Шапошников и Вальцов.— Сборник алгебраических задач. Давидов в начальной Алгебре, III гл. стр. 63, говорит, что взаимнопростые такие одночлены (и многочлены), которые общим наибольшим делителем имеют ± 1.

[6] Развитие вида.

[7] Развитие индивидуума.

[10] Этот взгляд приводится и в XVIII веке, см. De la Caille. Lectiones elementairs mathematicae. 1762.

или как результат умножения числа a на b, или как результат умножения отрезка a на b, при чем это понимание подвергается также эволюции; в первоначальном понимании это площадь прямоугольника, настроенного на a и b (между a и b, как говорит Эвклид)[11].

Но над этими понятиями стоит их объемлющее умножение (multiplicatio), понимаемое, как получение количества, которое к умножаемому имеет то же отношение, какое множитель к единице (Ренальдини[12] говорит к positum, т. е. положенному, избегая говорить к единице, относя последнюю только к числам).

Виэта говорит: числовая логистика (по нашему Алгебра) это та, которая оперирует с числами, специфическая же оперирует видами (espèces) или формами, как буквами алфавита.

Виэта[13] различает величины различных порядков:

линейные
площади — planum
телесные — solidum.

Что они теряют свой первоначальный геометрический смысл, это следует из того, что Виэтой признается и solidum-planum и planum-planum и т. д.

Но, во всяком случае, это разнородные величины, которые нельзя складывать и вычитать.[14]

Но возможно умножение и деление, так же понятие равенства отношений, или пропорции; отношения, как к однородным, так и к неоднородным величинам.

Можно писать пропорции

$$x \text{ plan} : A \text{ plan} = B \text{ sol} : 1 \text{ solid},$$

дающую согласно определению умножения

$$x = A \text{ plan} \times B \text{ sol}.$$

Умножение алгебраическое ни в коем случае не сводится к сложению. Эта мысль выявляется и в принятой Виэтой символике:

18 Q это 18 раз взятый квадрат:
Q + Q + Q + ... всего 18 раз.

Произведение же A на B пишется так

A in B.

Насколько серьезное затруднение родит этот взгляд, можно видеть из следующего характерного примера. Виэта выдвигает операцию:

---

[11] Эвклид. Начала, I книга.
[12] Coroli Renaldini. Ars Analytica. Anconae. 1644.
[13] Vieta. In artem analyticam Isagoge. 1591.
Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. B. II. Leipzig 1900.
[14] Смотри Lex homogenarum. Isagoge, p. 5. Marie. Histoire des sciences mathématiques, t. III, p. 9—19. Renaldini, p. 107.

„prothonescaton",[15] ведущую к превращению первого члена в последний и обратно.

С нашей точки зрения это весьма элементарная операция: преобразование уравнения:

$$x^3 - bx = a \tag{1}$$

подстановкой

$$x = \frac{a}{y} \tag{2}$$

Подстановка эта дает сперва

$$\frac{a^3}{y^3} - \frac{ba}{y} = a,$$

а по сокращении на a и умножении на y^3

$$a^2 - by^2 = y^3.$$

или

$$y^3 + by^2 = a^2.$$

Но Виэта так не может поступать. Во-первых, при его понимании характеристик уравнение (1) просто не имеет смысла: из объема вычитается площадь и в результате получается длина.

Следует заметить, что неизвестные означаются не последними буквами алфавита, а гласными.

Уравнение (1) представляется[16] в следующей синкопированной форме:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Acubus} \\ -\text{B plano in A} \end{array}\right\} \text{aequal . Z solido}$$

Если положим A равным $\frac{\text{Z sol}}{\text{E pl.}}$, то куб A будет

$$\frac{\text{Z solido . solido . solido}}{\text{E plano . plano . plano}};$$

$\frac{\text{Z solido}}{\text{E plano}}$ умножается на B в алгебраическом смысле.

Согласно терминологии Виэты ducetur in B planum; в результате уравнение обращается в следующее:

$$\frac{\text{Z sol . sol . sol}}{\text{E pl . pl . pl}} - \text{B pl} \ \frac{\text{in Z sol}}{\text{E pl}} \ \text{aeq . Z solido}$$

[15] Isagoge, p. 132—134; у Виэты эта операция ставит целью освобождение от иррациональности; полагая

$$x = \sqrt[3]{80}\, y \quad \text{уравнение}$$

$$x^4 - 8x = \sqrt[3]{80} \quad \text{приводим к } 80\,y^4 - 8\,y = 1.$$

[16] Renaldini. Cap, XXIX, p. 211.

Дальше идет умножение на E pl . pl . pl, Antithesis (или перенос второго числа в первую с измененным знаком) и перестановка частей уравнения.

E pl . cubus + B plano in E plano quedrato aequatur Z solidi quadrato или

E cub + B plan aeq Z solidi quadrato

Понимая же E как величину иного измерения, чем A, получается довольно серьезное затруднение. Обычно во второй части ставится Z solid., неизвестные всегда линейные величины, а преобразование приводит к уравнению, в котором корень понимается уже в новом смысле.

§ 3. Различные понимания характеристик.

Между этими примитивными взглядами и арифметизацией Алгебры, сделавшейся возможной только по установке взаимно-однозначного соответствия между числами и геометрическими величинами, усматривается промежуточный момент, когда a рассматривается, как прямолинейный отрезок[17], и всякие действия над буквами, напр., ab сводятся к действию над отрезками.

На OA и OC откладывается
$OA = a$, $OC = 1$ длины;

приводится AC; на OC откладывается $OB = b$ и из B приводится $BD \parallel AC$; тогда $OD = x = ab$, так как

$$x : a = b : 1.$$

Возможность приложения буквенной Алгебры к числам в этом смысле обусловливается тем, что формальные законы операций: сложения, вычитания, умножения и деления отрезков те же, что соответствующих действий над числами.[18]

Картезианский взгляд позволяет уже отбросить

planum и solidum.

Уравнение в современном чистом виде

$$x^3 - ax = b$$

имеет теперь определенный смысл: разность двух отрезков, определенным образом построенных с помощью неизвестного отрезка, равна данному.

Так Декарт понимает и уравнение между двумя величинами x, y, определяющее кривые.

---

[17] Декарт. La Géométrie de René Descartes. Livre I. Paris — Hermann 1898.

Геометрия начинается с построения алгебраических выражений с разъяснением их смысла.

[18] Картезианская точка зрения служит у Гильберта для основания теории пропорций без Архимедова постулата (Streckenrechnung). Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1899. S. 32 и др. издания. Есть и русское.

§ 4. Число индусов и греков.

Первые последователи Виэты резко отличали числовую Алгебру (numerosa) от буквенной (speciosa).

Первая всегда изменялась раньше второй и мы видели, что переход от первой ко второй представлял некоторые затруднения, которых в настоящее время, когда характеристикам дается значение численное, уже нет.

Численный характер Алгебры, как мы уже заметили, становится возможным только по установке взаимно-однозначного соответствия между геометрическими величинами и числами (в частности только отрезками и числами) [19], т. е. соответствующим расширением понятия числа, включающим в области чисел и числа иррациональные. Это можно отнести только к Лежандру [20], т. е. это произошло гораздо позже, чем обычно думают.

У индусов Алгебра говорит о рациональных числах. Как и наша Алгебра, все действия она относит к числам, но при этом берет только числа рациональные; из двух вышеупомянутых видов алгебраической величины она берет только первое.

Греки старались убеждать, в то время как индусы стремились только показать.

И те и другие выводили числовые тождества, как $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ из геометрического чертежа, но с той разницей, что у греков чертеж сопровождался словесным доказательством, а у индусов он сам говорил. Но говорил ли он о совершенно одном и том же или нет?

Если вникнуть глубже в характер индусского и греческого мышления, то придется признать, что для индуса положения II книги Начал могли быть только средством для установки числового закона, выраженного в реторической форме, в то время как для грека это чисто геометрические теоремы, которые заменяют необходимое в настоящее время приложение Алгебры (напр. при доказательстве обобщенной теоремы Пифагора).

Вспомним, что у греков Арифметика, как учение об исчислении (или лучше сказать Логистика, ибо Арифметику, как учение о свойствах чисел, они отличали от науки о методах вычисления), развивалась очень медленно; к четырем арифметическим действиям они не могли прибавлять еще действий извлечения корней, нахождения по рациональному числу такого, которое в квадрате дает это рациональное число, ибо признать иррациональные числа они еще не могли; но и верить в то, что $\sqrt{A}$ число рациональное, т. е. такое, которое античный мир только и признавал, они тоже не могли, так как для некоторых случаев уже имелось доказательство того, что это невозможно, и имелось достаточно аргументов за то, что это и вообще невозможно.

Иное дело индусы.[21] Вероятно у них была вера во взаимно-однозначное соответствие между числами и геометрическими величинами,

---

[19] См. мою работу: Из прошлого пятой книги Начал Эвклида. Математ. Образование за 1916 г. Большое историческое значение в этом отношении имеют (Arnaldus) Nouveaux éléments de Géométrie. Paris. 1683 и L. Bertrand. Developpement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques. A Genève. 1778.

[20] Legendre. Eléménts de Géométrie (много изданий).

[21] Об индусах подробно: Ващенко-Захарченко. История математики, Киев, 1883, стр. 377. Переводы на английский Bja-Ganita и Lilavati (Bascara) — Strachey. 1811. Taylor. 1816, см. также Buchner. De algebra Indorum. Elbing. 1821.

но только не как у нас в области рациональных и иррациональных чисел, а только чисел рациональных. Геометрическая проблема у них сводится к алгебраической проблеме решения уравнений. Последнее же разрешается с помощью ряда операций, которые являются следствием общих реторических формул; из них только некоторые устанавливались с помощью чертежа в указанном выше смысле.

§ 5. Алгебра арабов.

Арабская математика[22] это синтез греческой и индусской.

У арабов нет взаимнооднозначного соответствия между числами и геометрическими величинами. Отсюда раздвоенность их Алгебры.

Числовые уравнения определяют неизвестные числа, но эти же уравнения можно мыслить и как определяющие неизвестные геометрические величины.

Реторическая формулировка Амаями уравнений: Квадрат и десять корней равны тридцати девяти; здесь квадрат то же, что δύναμις степень. Диофанта, результат перемножения самого на себя; корень это самое число, названное так по геометрическому решению, потому что когда число определяет площадь квадрата, корень определяет его сторону.

Этим уравнениям можно придать форму в Виэтовской символике:

$$Q + 10R = 39,$$

но уравнение это относится и к геометрическим величинам, т. е. мыслится как

$$AQ + 10 \text{ in } A = 39 \text{ sol},$$

при чем решив последнее, можно решить и первое, но первое может не иметь решения, когда второе его имеет.

Амаями, высказывая для уравнения

$$x^2 + px = q$$

общую реторическую формулу

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2},$$

замечает, что если вопрос арифметический, то необходимо выполнение двух условий: 1) чтобы число корней, т. е. p было четное (т. е. делимое на 2, для получения $\frac{p}{2}$ целым), и 2) чтобы квадрат половины и число составляли в сумме полный квадрат; в противном случае вопрос арифметически невозможен, но геометрически не представляет затруднения.

---

[22] Об арабской алгебре, между прочим:
Matthiessen. Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra. Leipzig. 1878.

Арабами устанавливаются геометрические выводы[23] общих формул или общих правил разрешения уравнения. В до-алгебраический период геометрические задачи, разрешаемые с помощью уравнений 2-й степени, сводятся к одной исследованной Эвклидом задаче. Впрочем, сам Эвклид это не всегда сознает. Задачи второго порядка у него сводятся к различным геометрическим задачам, им разрешаемым.

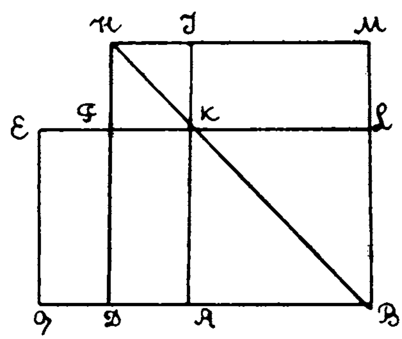
Видимо, эта возможность была сознана только арабами, заменившими общую задачу Эвклида более частной и более простой.

Из этой задачи и извлекались сперва формулы решения квадратного уравнения.

Дальнейшая стадия, это замена ее выводом, аналогичным доказательствам II книги начал Эвклида, это доказательство приводит возможность установки, по образцу II книги, основных законов формальных алгебраических операций и вывода отсюда только с помощью этих операций алгебраических формул.

Такими доказательствами пользуется еще и Виэта[24] для уравнения:

$$x^2 + px = q \qquad p > 0$$



Чертеж 1.

Берется чертеж (1).

Здесь

$$AB = x, \ AG = p$$

AG делится пополам, $GD = DA$ и на DB строится квадрат.

Если отложить на $EG \perp GB : EG = x$ и привести $EF = AB$, то диагональ BH пересечет EF в вершине квадрата $ABKL = x^2$.

Формула

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4},$$

дающая

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

[23] См. главным образом сочинение Магомета бен Музы (около 830 г.).
Liber Mahmeti filii Moysi Alchoarissmi de algebra et almuchabal incipit.... известно в средние века.
Английский перевод Rosen. London. 1831.

[24] Renaldini. Геом. выводы числовой алгебры, стр. 65, 77, 85; буквенные p. 128, 133, 136.

доказуется тем, что, если

$$q = DBMIKF,$$

то, с одной стороны,

$$q = ABLK + KLMI + DAKF = x^2 + px,$$

другой стороны квадрат,

$$DBMH = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2, \text{т. е. } DB = x + \frac{p}{2}$$

и вместе с тем

$$DBMIKF + FKIH = q + \frac{p^2}{4}$$

§ 6. Отрицательные числа.

Одно из самых серьезных затруднений у старых алгебраистов в том, что они не имеют в нашем смысле (т. е. количественном) отрицательных[25] величин. Правило перемножения знаков носит исключительно операционный характер и основывается на тождестве:

$$(a - b)\ (c - d) = ac + bd - ad - bc,$$

выводимом геометрически,[26] в силу чего оно относится только к случаю, когда

$$a > b > 0,\ c > d > 0.$$

Это, конечно, усложняет уже и числовую алгебру, заставляя рассматривать особо каждый из таких случаев:[27]

$$x^2 + px = q$$
$$x^2 - px = q$$
$$px - x^2 = q$$

Следует отметить, что так как геометрическое доказательство ведется только с положительными величинами, то если бы кто-либо из старых алгебраистов и дошел бы до отрицательных величин в нашем смысле, то он мало бы выиграл, так как для каждого из упомянутых трех случаев пришлось бы строить особое доказательство.

Отрицательные корни рассматриваются поэтому, как решения невозможные.

Если характеристики у старых алгебраистов не числа, а величины в более широком понимании, то, с другой стороны, они означают только положительные величины, вследствие чего и для буквенных уравнений приходится рассматривать различные типы, соответствующие различными знаками коэффициентов.

---

[25] Количественную точку зрения можно увидеть у индусов. У Диофанта + знак операции.

[26] Напр. в курсе Алгебры Лакруа. Истор. данные смотри в книге Мрочек и Филиппович. Педагогика математики.

[27] Renaldini. Alg. Speciosa

AQ + B in A = ZQ p. 128
AQ — B in A = ZQ p. 131
B in A — AQ = ZQ p. 134

У нас $A - B$ всегда имеют смысл, у Виэты [28] только тогда, когда $A > B$.

Конечно, при этом возникает большое затруднение: при производстве вычисления растет число ограничительных условий. Если $A - B$ имеет смысл при $A > B$, то $(A - B) - (C - D)$ уже при $A > B$, $C > D$ и $A - B > C - D$.

Только при таких ограничительных условиях имеет смысл и доказуется тожество

$$(A - B) - (C - D) = A - B - C + D.$$

Ринальдини выход из этого затруднения находит не в отрицательных числах, а в операциях, объемлющих их

$$A - B \text{ при } A > B \text{ и } B - A \text{ при } A < B$$

и означаемых через $A \sim B$.

Она дает возможность некоторые, но далеко не все, тожества представить уже в буквенных формулах:

$$(A - B)\, C = AC - BC \text{ при } A > B$$
$$(B - A)\, C = BC - AC \text{ при } A < B$$

но

$$(A \sim B)\, C = AC \sim BC \text{ всегда}$$

$$A - B - (C - D) = (A + D) - (B + C) \text{ при } A > B,\ C > D,\ A + D > B + C$$
$$B - A - (D - C) = (B + C) - (A + D) \text{ при } B > A,\ D > C,\ B + C > A + D$$
$$\text{но } (A \sim B) \sim (C \sim D) = (A + D) \sim (B + C) \text{ всегда и т. д.}$$

§ 7. Основные алгебраические операции Виэты.

Методы Виэты, конечно, весьма примитивны в сравнении с нашими, но они необыкновенно интересны, как эмбрионы наших совершенных методов.

Я уже заметил, что для учащегося трудным моментом является деление на буквенный коэффициент при неизвестном. Этот момент и старым алгебраистам не представлялся столь простым, как нам, и Виэта выставляет эту операцию, как основную, называя ее parabolismus,[29] в то время как перенос члена из одной части в другую им называется antithesis.[30]

Третья операция Виэты hyperbolismus [31] — деление на неизвестное, приведение, например, уравнения $ax^2 = bx$ к уравнению $ax = b$.

Но он сознает недостаточность этих трех операций для получения формально-алгебраическим путем, а не геометрическим рассуждением, корней квадратных и кубических уравнений, и он применяет подстановку, которая является прототипом Чирнгаузеновского преобразования.

Эта операция называется им plasma [32] — плазма имеет целью упростить уравнение; для квадратного уравнения — приведением его к чистому.

[28] Renaldini. Alg. Speciosa Cap. III. Operatio Secunda, см. также p. 126.
[29] Renaldini. Parabolismus в числовой алгебре. Cap. X, p. 59.
[30] Renaldini. Alg. Speciosa. Cap. IX, p. 121.
[31] Viete. Introduction.
[32] Renaldini. Cap. XV, p. 148.

Не желая читателя затруднять Виэтовской символикой, я выражу его мысль на нашем языке. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ подстановкой $x = y + h$ (*) приводится при надлежаще выбранном h к

$$\alpha y^2 + \beta = 0.$$

То же преобразование принимается Виэтой[33] и к упрощению уравнений высших степеней.

Кроме преобразования $x = y + h$ рассматриваются еще следующие:

$$x = \frac{y}{b}, \quad x = by, \quad x = \frac{b\,y}{g}, \quad x = \frac{bg}{y}, \quad x = \frac{d - y^2}{y}.$$

Последнее употребляется Виэтой для решения уравнений 3-й степени, а именно через приведение его при $3d = p$ к уравнению:

$$y^6 - gy^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Так называемое expugnatio per unicas[34]—сведение к уравнению, освобожденному от некоторых степеней, и protoneschation,[35] о котором выше говорили, представляют собственно такого же типа операции, но направленные на определенные члены: isometria[36] умножение дробности подстановкой $y = x$, anastrophe[37] это преобразование коррелятивных уравнений одно в другое.

При этом под коррелятивными уравнениями разумеются:

$$\begin{array}{ll} bx - x^2 = c & by - y^2 = c \\ x^2 + bx = c & y^2 - by = c \\ bx - x^2 = c & y^2 - by = c \end{array}$$

§ 8. Странности старой Алгебры.

Интересно отметить, что второй операцией после антитезы выставляется превращение уравнения в пропорцию.[38]

В настоящее время применяется обратная операция: пропорция $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ сводится к $AD = BC$.

Теперь никто уже не решится сводить квадратное уравнение

$$x^2 + ax = b^2$$

к пропорции

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{a + x}$$

Мы легко поймем эту странность, если вспомним что у Виэты Алгебра еще не освободилась от Геометрии, что решение уравнений легче иногда сводится к задачам Геометрии, в которых пропорция

[33] Vieta. De aequationum recognitone et emendatione 1615, p. 123—124.
[34] p. 132—134.
[35] Renaldini, p. 230.
[36] p. 216.
[37] Renaldini, p. 175.
[38] Renaldini. Algebra Spec. Cap. II, p. 129.

играет важную роль, входя во многие теоремы. Значит пропорция здесь открывает не путь к формальным алгебраическим операциям, дающим решение, а к выводу решения чисто **геометрическим** путем.

Другая странность обнаруживается в той форме, в которую облекается известное и столь видную роль играющее в Элементарной Алгебре положение о сумме корней квадратного уравнения. Мы скажем, что, если x_1 и x_2 корни уравнения

$$bx - x^2 = C,$$

то

$$x_1 + x_2 = b$$

Но форма выражения у старых алгебраистов совсем другая:[39] Даны два уравнения

$$bx - x^2 = c \qquad by - y^2 = c,$$

если x корень первого, y—второго, то

$$\text{или } x = y \text{ или } x + y = b.$$

Не будем забывать, что отрицательных корней нет у Виэты,[40] поэтому положение для уравнений

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

не имеет смысла.

Но можно сказать, что, если x определяется уравнением

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

а y уравнением

$$y^2 - y - 6 = 0,$$

то или $x = y$ или $x + y = 1$, при чем следует брать именно **первый** случай.

Указанное свойство берется не особняком, а как одно из свойств пар коррелятивных уравнений.

Для уравнений

$$x^2 + bx = c \qquad y^2 + by = c$$

получаем

$$x = y \text{ или } x - y = -b$$

для уравнений

$$bx - x^2 = c \qquad y^2 - by = c$$
$$x - y = -b$$

Операции, которые приводят к намеченным результатам, это те, которые в школьной практике применяются к решению систем уравнений с двумя неизвестными.

---

[39] Renaldini. Alg. Spec. Cap. XXIII. Vieta de recogn. Cap. 19, 20, 21.

Виэта решает задачу о построении уравнения, определяющего данные **положительные** корни и дает следующие формы:

$(a + b)x - x = ab$, $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x = abc$; p. 158.

[40] У Жирарда (Cantor B. II, s. 777) отрицательные корни фигурируют наряду с положительными, им придается геометрическое значение и — объясняется „отступая", + „идя вперед". Многие корни являются только показателями того, что корней меньше, чем степеней уравнения, при чем настолько, каково число многих корней. Но Харриот не признает отрицательных корней (Cantor, 790. Kästner. B. III, 42—46, 179—181).

Интересно еще отметить, что Виэта не выводит раз навсегда формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (**)$$

для того, чтобы, как делаем мы, например, находя

$$(x^3 - bx^2)^2$$

подставляет в (**) вместо a..... x^3, b..... bx^2

Учащиеся всегда именно в этом пункте встречают затруднения. Необходимо поработать над учеником, чтобы он научился свободно оперировать целыми выражениями, как буквами. Но, я думаю, причину этой странности следует искать не только в непривычке оперирования буквенными выражениями, как буквами, но в некотором видимом противоречии общности формулы с пониманием самих характеристик.

Закон (**) просто нельзя было выразить одной формулой.

Для B, C линейных можно писать

$$(B + C) \text{ in } (B + C) = BQ + B \text{ in } C \,.\, 2 + CQ$$

Но, если они planum, то получается формула совершенно иная: (Bpl + Cpl) in (Bpl + Cpl) = Bpl . pl + Bpl in Cpl . 2 + Cpl, Cpl и т. д.

Кроме того иначе следует их писать для случая, когда величины известны и когда неизвестны, ибо принято обозначать гласными неизвестные, согласными известные.

Этот закон, невыражаемый т. о. формулой символически, не выражается и риторически; результат всегда получается процессом умножения.

Чаще всего приходится встречаться с этим в приведении к климатической симметрии[41], что теперь называется освобождением от иррациональностей.

Приводим в Виэтовской символике ход действий над уравнением:

AC — Bpl in Aaeq R Z sol . sol

здесь $RZ = \sqrt{Z}$

$$\begin{array}{r}
AC - Bpl \text{ in } A \\
AC - Bpl \text{ in } A \\
\hline
- Bpl \text{ in } AQQ + Bpl \,.\, pl \text{ in } AQ \\
ACC - Bpl \text{ in } AQQ \\
\hline
ACC - Bpl \text{ in } AQQ \,.\, 2 + Bpl \,.\, pl \text{ in } AQ
\end{array}$$

(коэффициент всегда пишется на последнем месте).

Наконец

A cubus . cubus
+ B plano . plano in AQ
— B plano in AQQ bis aeq Z solido . solido

Отметим, что дальнейшее упрощение символики осуществляется тремя принципами:

1) буквы, поставленные друг около друга без знаков + или —, должны перемножаться;

2) AQ обозначается в силу этого через AA, AC через AAA, затем AAA через A^3 и т. д.;

---

[41] Renaldini, p. 235.

3) коэффициенты пишутся, во избежание возможного смешения A^2 и $A2$, в начале.

В первом издании своего труда Ренальдини вполне следует Виэтовской символике, но в 1665 году он уже пишет:

$$\begin{array}{r}
a^2 + 2ae + e^2 + bpl \\
a + e \\
\hline
a^2e + 2ae^2 + e^3 + bpl \,.\, e \\
a^3 + 2a^2e + ae^2 \qquad\qquad + bpl \,.\, a \\
\hline
a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 + bpl \,.\, e + bpl \,.\, a
\end{array}$$

§ 9. Синкопированная буквенная Алгебра.

Числовая Алгебра прошла три стадии: реторическую, в которой все высказалось словами, синкопированную, где слово смешивалось с символом, и наконец символическую, в которой слово заменялось письменным символом. Можно сказать, что буквенная Алгебра у Виэты находится еще в синкопированном периоде и если сравнить изложение — хотя бы решение квадратного уравнения числового и буквенного, то бросится в глаза словесность последнего.

Приводим это место из Виэты сперва на латинском языке, затем в переводе на русский:

1 . Si A quadr.+ B . 2 in A aequantur Z plano
A+B est E
Igitur E quad . aequabitur Z plano + B quadr.
Consectarium . Itaque $\sqrt{\text{Z plan} + \text{B quad}} - \text{B}$
fit A de qua primum quaerebatur.
Sit B 1 Z planum 20 A 1 N
1 Q + 2 N aequatur 20 et fit 1 N $\sqrt{21} - 1$.

Если A квадрат + B2 на A равняется Z плоскому; A + B пусть E. Итак E квадр. будет равняться Z плоск.+ B квадр. Следствие. Итак

$$\sqrt{\text{Z плоск.} + \text{B квадр.}} - \text{B будет A}$$

которое и требовалось найти.

Пусть B1. Z плоск. 20 A1 N 1 Q + 2N будет равняться 20 и будет

$$1\text{N } \sqrt{21} - 1.$$

Было бы неправильно представлять ход развития буквенной Алгебры совершенно аналогичным ходу развития числовой Алгебры.

В числовой Алгебре слово играет роль не только обозначения; это словесный символ, над которым производятся те формальные операции, которые затем производятся над письменными символами.

С вещью производят то же, что с x, ее переносят из одной части в другую с измененным знаком, вещи складывают и вычитают и т. д.

Приводим пример из Бэг-Эддина: [42]

Кто-то спросил, сколько времени прошло ночью? Он ответил: треть прошедшего времени равна четверти остающегося. Сколько прошло времени и сколько осталось?

Прими протекшее время за вещь, то тогда то, что остается, 12 без вещи: откуда треть протекшего времени равна 3 без четверти вещи. После приложения „algebr" треть и четверть протекшего времени равны 3.

Частное 5 и одна седьмая есть число протекших часов; оставалось 6 и шесть седьмых часа.

Но если коэффициенты остаются произвольными, т. е. если в нашей символике имеем уравнение:

$$ax + b = cx + d,$$

то не существовало такой реторической буквенной алгебры, которая выражала бы в словах следующие операции:

$$ax - cx = d - b$$
$$(a - c)\ x = d - b$$
$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Но существовали общие реторические формулы, выраженные собственно не как формулы, а как правила последовательных операций для получения конечных результатов. Например, общая реторическая формула решения квадратного уравнения: [43]

Si res et census numero aequantur a rebus,
Dimidio sumpto census producere rebus,
Addere numero eius, a radice totiens
Tolle semis rerum censu latusque redibit.

Если вещи (px) и квадрат (x^2) равны числу, то взяв половину вещей $\left(\frac{p}{2}\right)$ и возведя в квадрат $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, прибавь ее к числу (q) и из корня из всего полученного вычти половину вещей $\left(\frac{p}{2}\right)$.

§ 10. Арифметические правила, как реторическо-алгебраические формулы.

В точном смысле слова поэтому нельзя отнести арифметические правила, имеющие столь важное значение в старой Арифметике, к реторической Алгебре. Реторическая алгебра начинается только там, где мы начинаем операции над символами, выражающими данные величины, а не только неизвестные, а такой реторической алгебры, отвечающей буквенной, как мы заметили, вовсе не было.

---

[42] Khelasat al Hisab ou Essence de Calcul de Beha-Eddin. Nouvelles Annales XV. 1846.

[43] Из Lucas Pacioli. Liber Abaci.
Лука Пачиоли (1445 — 1514).
О нем также Лоренц. Элементы Высшей Математики.
Лебедев. Очерки по истории точных наук. Кто изобрел алгебру? Петроград. 1919.

В настоящее время мы имеем скорее типы задач на тройное, смешанное и т. д. правила, чем сами правила, которые еще в XVII веке были ничем иным, как реторическими формулами, введенными в арифметику только вследствие их практического значения в жизни.

„Тройное правило прямое — способ к данным трем первым числам найти четвертое пропорциональное".[44]

Сделать тройное правило прямое:

Понятие о тройном прямом правиле: к данным трем первым числам сыскивается четвертое пропорциональное того-же рода, и из данных трех последние два умножить между собой и произведение их разделить на первое: частное будет четвертое пропорциональное.

Правило товарищества есть способ, помощью которого данное число разделяется на части, другим данным числам пропорциональные.

Первый случай, когда данные числа без всяких обстоятельств.

1) Данные числа сложи и

2) сумму их поставь на первом месте, на втором общее число, а на третьем одно которое-нибудь число из данных и

3) тройное простое правило повтори столько раз, сколько данных чисел.

Только эти два правила дают общие реторические формулы для уравнений:

$$1)\ a : b = c : x$$
$$2)\ x : y = a : b \qquad x + y = c.$$

независимо от конкретного значения.

Все же другие правила дают реторические формулы с точным указанием конкретного содержания задачи, а не реторического уравнения. Так что для двух различных по конкретному содержанию задач мы будем иметь различные правила, хотя уравнение будет то же.

Так, правило смешанное дает возможность определить, сколько следует взять вещества данных ценностей, чтобы смесь имела данный вес и данную цену.

Но задача: N проехал всю дорогу в 190 верст от своего имения до города в 9 часов, при чем ехал сперва на лошадях, делая 10 верст в час, затем по железной дороге, делая 35 верст в час; сколько времени он ехал на лошадях, сколько на поезде? — хотя и приводящая к совершенно той же системе уравнений

$$ax + by = c \qquad x + y = d,$$

тем не менее не относится к правилу смешения.

Если иметь в виду купца, которого желательно научить производить с выгодой или, по меньшей мере, без убытка для себя махинации с винами и другими товарами, то нельзя отрицать полезности изучения формул, решающих этого рода задачи.

Но в настоящее время арифметический учебник составляется для детей и при этом на первый план ставится не научное значение, а развитие ума.

С этой точки зрения все эти правила в значительной мере теряют свое значение. Их место должно по большей части занимать типы арифметических задач, т. е. наглядно-реторических решений, при чем типы должны определяться характером логических операций, а отнюдь не конкретным содержанием задачи.

---

[44] Аничков. Теоретическая и практическая арифметика. Москва. 1786.

Упомянутая только-что задача должна быть отнесена к той же группе задач, что задачи на смешение вин, к задачам с решением, представляющим арифметированное решение простейшей системы уравнений:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ x + y &= d \end{aligned}$$

по методу сложения и вычитания.

В ряде задач с наглядно-реторическими решениями, отвечающими течению совершенно различных образцов, учащийся должен прощупать одну и ту же схему логического мышления и научиться ее применять и в других подходящих случаях.

Но не следует отсюда делать заключения о необходимости исключения „правил“ из Арифметики.

Вне сомнения, что буквенная Алгебра пускает свои корни именно в эти правила: в них именно впервые математики пытаются выразить в общей форме хотя бы результат, будучи еще не в силах сделать то же с самим ходом решения, общность которого они уже сознают. Совершенно таким же образом, как согласно § 1, следует от арифметических решений перейти к числовым уравнениям, от правил, т. е. словесной формулы, следует перейти к буквенной, но последняя не есть еще буквенная Алгебра, а только преддверие в нее.

Д. Мордухай-Болтовской.

IV. Аксиоматика XVII века.

(Первая половина XVII века).

§ 1. История новой аксиоматики.

История не-Эвклидовой Геометрии дает богатейший материал для психологических размышлений. Как и в других случаях, мы здесь имеем перед нашими глазами эволюцию не только решения поставленной проблемы, но и самой ее постановки, так что в позднейшей стадии своего развития проблема так же мало похожа на то, чем она была раньше, как старик похож на годовалого ребенка.

Сперва это задача только о дополнении Эвклида [1], о доказательстве недоказанной теоремы, принятой, скрепя сердце, за постулат или аксиому (Геминус, Насир - Эддин); затем об исправлении Эвклида путем замены сперва его системы определений, а затем системы аксиом другими, более согласующимися с идеалами сперва рамической (Рамус [2], Клавий [3]), а затем картезианской логики (Борелли [4], Арно [5]). Сенсуалистическая гносеология, по которой всякое знание, даже геометрическое,

---

[1] Начала Эвклида в переводе Ф. Петрушевского или Ващенко-Захарченко.

[2] Petri Rami. Geometriae Libri XXVII. Basileae 1569. Scholarum Mathematicarum. Libri unus et triginta. Basileae 1569.

[3] Euclidis elementorum. Libri XV, auctore Crist. Clavio. Francfurt (1574). (1654).

[4] Borelli. Euclides restitutus 1679.

[5] Arnaldus. Nouveaux éléments de geométrie. Paris 1683.

вытекает из опыта, создает мысль о возможности ошибки в постулатах Эвклидовой Геометрии и возможности другой, более приближающейся к истине Геометрии.

Таким образом возникает проблема о доказательстве истинности Эвклидовой Геометрии (Саккери [6], Ламберт [7], Лежандр [8]). Перед математиками выступают три системы Геометрии, из которых две стараются исключить путем вскрытия в них противоречия.

Далее — проблема о строении не-Эвклидовой системы Геометрии, не удовлетворяющей 5-ому Эвклидову постулату, ирремие возможных логически пространств, построение „Summum genus“ высшего рода, объемлющего эти пространства (Грассман [9], Риман [10], Гельмгольц [11] и Ли [12]). Но отсутствие противоречия в геометрической системе, развиваемой в одном из этих пространств, еще не доказывает, что это пространство может существовать, ибо противоречие может оказаться в тех положениях, которые не вошли в эту систему.

Здесь проблема из онтологической о реальном пространстве обращается в чисто-логическое аксиоматическое исследование (Бельтрами [13], Клейн [14], Гильберт [15]), в исследование совместности положенных в основание геометрической системы постулатов.

Можно сказать, что вместе с тем с глаз математиков спадает пелена, закрывавшая более широкие взгляды на задачи Математики. В то время, как раньше интересовали только узлы той сети, которую образуют математические положения с связующими их логическими связями, и требовалось указать хотя бы один путь от постулатов к теореме, теперь интерес переносится на саму сеть.

В начале этой сети ряд аксиом: A, B, C... Д; дальше, положения P, Q, R... Эти последние требуется не только вывести из A, B, C... Д, но и требуется разузнать всевозможные системы путей, идущих от A, B, C... Д и вытекающих в P, Q, R... S, требуется определить возможно ли доказать положения P, Q, R... S с помощью только части выставляемых постулатов A, B, C... Д. Но это еще не все. Из очевидных постулатов (таких, которые поэтому могут быть названы аксиомами) требуется найти минимум, из которого выводится определенная система положений.

Но ту же проблему можно отнести и к н е о ч е в и д н ы м положениям и, задав ряд положений P, Q, R... S искать, идя, так сказать, против течения в логической сети, минимум неочевидных положений, из которых, идя через различные узлы сети, можно вывести положения P, Q... S.

Проблема: „доказать положения P, Q, R... S“ обращается в следующую:

Определить возможно ли вывести P, Q, R... S из положения A, B, C... Д и если возможно, указать этот вывод (и даже более того, всевозможные выводы P, Q, R... S из A, B, C... Д).

---

[6] S a c c h e r i. Euclides ab omni naevo vindicatus.

[7] L a m b e r t. Theorie der Parallellinien.

[8] L e g e n d r e. Eléments de Géométrie. Paris. 1794.

[9] G r a s s m a n n. Die lineare Ausdehnungslehre. Leipzig 1844.

[10] R i e m a n n. Ueber die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen, есть русский перевод. Каз. Мат. Об.

[11] H e l m h o l t z. Ueber die Thatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen.

[12] L i e. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig 1888 — 1893.

[13] Статьи Бельтрами в Annali di Mathematica. T. IVII. 1865.

[14] K l e i n. Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie. Mat. Ant. IV, VI. XXXVII.

[15] H i l b e r t. Grundlagen der Geometrie. Прекрасный исторический очерк оснований Геометрии можно найти в основаниях Геометрии проф. В. Кагана. Одесса 1907.

Психологическое, а отнюдь не логическое свойство очевидности некоторых постулатов не дает никакого аргумента за то, что из системы очевидных постулатов можно вывести всякое положение. Поэтому, конечно, существуют верные, не недоказуемые положения, если доказуемость понимать так, что конечным ее результатом должны явиться убеждения в правильности выставленного положения.

Основной проблемой поэтому является следующая. Возможно ли доказать положение P, Q, R... S и, если возможно, то построить доказательство, при этом изыскать среди нескольких возможных доказательств то, которое отвечает минимуму очевидных постулатов.

§ 2. Правила Паскаля.

Вот вкратце происхождение современной аксиоматики и ее частью выполненные, частью невыполненные проблемы.

Мы стоим теперь там, где Логика сходится с Психологией, где уже чувствуется разочарование в идеалах чисто-логической Математики, где психологический анализ вскрывает, что то, что представлялось чисто логическими операциями, оказывается иллюзией, приводящей к чисто психологической проблеме.

Прошедшее всегда подвергается искажению проецированием в него настоящего, многие видят в рационализме XVII века логистические тенденции последнего времени.

Верно только то, что во время Лежандра и еще более в первой половине XIX века об аксиомах не любили говорить, и как характерное свойство Лежандровых учебников [16] можно выставить отсутствие аксиом; в XVII веке своеобразная аксиоматика занимала почетное место. Нельзя отрицать того, что математиков того времени интересовали аксиомы, как и нас. Но только в них интересовало именно то, что нас в настоящее время менее всего интересует.

Это было время, в которое не Логика с Психологией, а Метафизика сходилась с Математикой, математизировались метафизические идеи, которым при дальнейшей эволюции математической мысли суждено было логизироваться.

Очевидные истины, лежащие в основе знания, представлялись тогда своего рода откровениями свыше, врожденными человеческому разуму, который при конечности опыта несет в себе не извлекаемую из опыта идею бесконечности.

Основной аксиоматической проблемой являлась поэтому не логическая проблема совместности и независимости аксиом, а метафизическая проблема собирания полной коллекции очевидных истин.

Рядом с этой проблемой стояла другая — о разыскании средств для повышения степени очевидности этих, правда, очевидных, но только не в равной мере очевидных истин.

---

[16] Legendre. Eléments de Géométrie и все учебники Лежандрова типа: Garnier-Vincent. Sonnet, Terquem, Lacroix и другие.

В этом отношении в высокой степени характерна книга:

„Perronet-Tompson". Géométrie sans axiomes, ou le premier livre des éléments d'Euclide demontré d'une manière completement rigoureuse, trad. de l'anglais par van Tenas, Paris, 1836, в которой доказываются все аксиомы, но только с помощью сложных стереометрических рассуждений.

Следует вдуматься в правила Паскаля [17], чтобы ясно представить характер этой совершенно чуждой нам эпохи.

I. Не следует ничего определять, что само по себе так известно, что не может быть определено с помощью более простых выражений.

Это значительно уменьшает определения того значения, которое придается ему схоластической эпохой. Таким образом не следует возиться с точкой, стараясь ее тем или другим способом определить, а тем более нагружать ее несколькими определениями. Точка нечто настолько простое, что достаточно только отрешиться от чувственности, чтобы увидеть ее, так сказать, как на ладони.

Неопределимость некоторых простейших объектов признается и логистическим направлением, но вовсе не потому, что этот объект признается постигаемым непосредственным прозрением, но потому, что это пустой символ, жизнь которому в нормально-гипотетической науке дают только относящиеся к нему постулаты.

II. Не следует оставлять без определения ни одного темного или рождающего двусмысленность выражения.

III. Следует при определениях употреблять только такие слова, которые или вполне известны, или которые тут же вполне разъяснены. Эти два правила разъясняют сущность идеографических опытов XVII века, о которых ниже будем говорить.

Правило отражает в себе рационалистический взгляд на аксиомы:

IV. Не следует проходить мимо какого-либо основного положения, как бы оно не было ясно и очевидно, не забывая вопроса: можно ли это положение признать за аксиому.

Для рационалиста аксиома — это вполне очевидное положение.

V. За аксиомы следует принимать только то, что совершенно очевидно.

Таким образом предполагается какой-то особый акт, с помощью которого определяется степень очевидности положения и возможность отнесения его к совершенно очевидным истинам, т.-е. аксиомам.

Отсюда, конечно, один шаг до признания положений с очевидностью, колеблющейся около порога совершенной очевидности, и изыскания средств для закрепления его над этим порогом, о чем мы будем еще говорить.

В шестом правиле Паскаль отступает от Эвклида, но остается столь же далек и от современной Математики.

VI. Не следует, говорит он, ничего доказывать, что так очевидно, что не нуждается ни в каком более ясном средстве доказательства.

Доказательство еще не является самоцелью, логическая сеть, связующая математические истины, еще не служит предметом исследования.

Совершенно не важно, связаны ли между собой логически очевидные истины.

---

[17] Pascal. Oeuvres III, p. 163 — 182.

§ 3. Правила Декарта.

Эти правила, не выдумка самого Паскаля, а выражение лишь того, что в его время думали, разъясняют сущность идеографических опытов XVII века, например Херигона.

Идеография XVII века — это изыскание хорошего безошибочного языка, в котором каждая вещь и каждая операция обозначаются точным символом.

Проблема логического автомата мало интересует мыслителей того времени. Характерной чертой рационалистической эпохи, в особенности более ранней, является то, что интересуются не столько методами изыскания истины, как методами избежания ошибок [1]. В сущности говоря, ни Бэкон не исследовал сущности индуктивного метода, ни Декарт дедуктивного. Но оба они, главным образом, занимались ошибками, возникающими при индуктивном и дедуктивном родах мышления.

В параллель правилам Паскаля можно здесь упомянуть и о правилах Декарта [2], которые представляют советы, как избежать ошибок при дедукции.

1. Первое правило позволяет принимать за истинное только то, что познано таковым наверняка и очевидно (certe et evidenter), это значит, прибавляет Декарт, следует избегать спешки в заключениях.

2. Трудные проблемы следует расчленять на несколько, и каждую решать в отдельности.

3. Следует итти от более простого к более сложному.

4. Следует зорко следить, как бы не упустить какого-либо элемента в рассуждении.

Можно сказать, что целью идеографии XVII века является именно избежание ошибок согласно правилам Декарта: фиксируя символами, заменяющими, вообще, с колеблющимся смыслом слова, вещи и операции над ними, расчленяя сложные на простые элементы и последние означая простыми символами, а первые их комбинациями, не пропускать ни одного важного понятия, не означив его символом.

§ 4. Операции повышения степени очевидности.

Следует обратить особое внимание на то, что рационалисты XVII и XVIII в. в. признавали различную степень очевидности основных положений, признавали, что в иных случаях разум можно поставить в такое положение, при котором степень очевидности какого-либо истинного положения возрастет.

Для этого необходимо очищение разума от чувственности, закрывающей лучи его натурального света своего рода туманом.

И если мы теперь обратимся к рассуждениям рационалистов, то легко усмотрим присутствие в них особого рода доказательств, имеющих своим содержанием не строго-логический вывод исследуемого положения из положений очевидных или же выведенных из очевид-

---

[1] Характерны сами названия сочинений: Tschirnhausen. Medicina mentis sive artis inveniendi praecepta generalia. Amstelodami 1687. Чирнгаузен (1651 — 1708). О нем см. Cantor B. III 3. 112. Hansch. Ars inveniendi s. Synopsis regularum praecipuorum arti inveniendi 1727.

[2] Regulae ad directionem ingenii. Oeuvres morales et philosophiques par Amedée. Paris 1855. Рассуждения о методе, пер. Любимова. Ж. М. Н. П. СПБ. 1885 — 86. О Декарте. Ziehen. S. 26, 99.

ных, но различного рода пояснения, настраивающие так, что положения, очевидные для автора, после этих пояснений становятся в равной мере очевидными и для читателя.

Возьмем основную аксиому Арно [18], введение которой позволяет ему избегнуть неприятного для рационалистов XVII века метода наложения.

Она состоит в том, что если двум токам С и Д прямой присуще свойство равноудаленности от А и В, то то же свойство присуще всем точкам прямой CD.

Другие авторы, делая уступку методу наложения, но желая сохранить оригинальный порядок теорем по Арно (ordo Arnoldiani), доказывали это положение не с помощью теорем о конгруэнтности трехугольников, а с помощью сгибания, т.-е. методом наложения [19]. Арно, с одной стороны сознавая, что он не сможет, минуя метод наложения, доказать это положение, с другой стороны, сознавая и то, что оно уступает в очевидности другим его аксиомам, вынужден употребить упомянутое выше средство убеждения или увеличения степени очевидности.

Приводим его шесть аргументов:

„Я утверждаю, говорит он, что только одно созерцание (consideration) природы прямой линии заставляет видеть истинность этого положения и что без него невозможно сохранить в Геометрии естественный порядок вещей.

Ибо: 1) Так как положение прямой зависит только от двух точек, и при задании этих двух точек оно все дано, т.-е. положение всякой другой точки определено, видно (il est visible), что положение этих двух точек секущей линии, из которых каждая представляет равноотстоящую от двух точек, определяет все точки так, что они тоже равно отстоят.

Это, конечно, не логическое доказательство и Арно за таковые его не выдает.

Пусть точка С в расстоянии d от некоторой точки А, пусть другая точка D в том же расстоянии d от этой точки А. Рассуждая, как Арно, можно было бы заключить, что и всякая точка в том же расстоянии d от А.

Действие этого шаткого аргумента усиливается другим:

2) „Если бы была какая-либо точка Е, более близкая к А, чем к то прямая необходимо была бы согнута в эту сторону“.

Здесь разум приглашается к особого рода операции, к попытке построения прямой с противным аксиоме свойством.

3) „Нет основания тому, почему бы этой точке приблизиться к одной стороне предположительно перед другой, ни тому, почему приблизиться на то или другое количество.

Ибо положение данных точек, определяющих и все остальные точки прямой, может их определить только с равными расстояниями, ибо для них самих существует это равенство“.

Это весьма туманное изложение вероятно следует понимать так:

Точки Е и D вполне определят прямую ED. Плоскость ею разбивается на две части P и Q. Если бы мы не имели DB = DA, EB = EA, то обе стороны P и Q различались бы по своим свойствам относительно прямой AB и точек A и B, и причиной сему было бы то, что пара расстояний от A (d_1 d_2) была бы иной, чем пара расстояний от B (d'_1, d'_2).

---

[18] (Arnaldus) Nouveaux Eléments de Géométrie. Paris 1683.

[19] Varignon. Eléments de Mathématiques. Amsterdam 1734.

[20] Rivard. Eleménts de Mathématiques, Paris. 1768.

Но раз (d_1, d_2) (d'_1, d'_2) одинаковы для обеих сторон, то и все свойства одинаковы, ибо все свойства определяются, если будут даны расстояния E и D от A и B.

Это, конечно, не математическое доказательство. Это обращение к общим свойствам пространства, которые как бы смутно нами чувствуются, а не зрятся, как частные свойства фигур, определяемые аксиомами.

Рационалист Арно, конечно, отвергает, что какое-либо ложное положение может когда-либо сделаться очевидным.

Если положение не всегда очевидно, но когда-либо бывает таковым, то оно истинно, ибо существуют моменты, когда туман чувственности, застилающий истину, расходится и разум с полным внутренним прозрением постигает истину.

4) „Все геометры, продолжает Арно, видимо сходятся на очевидности этого положения, ибо при решении всех проблем, касающихся перпендикуляров, все их дело сводится к разысканию двух точек секущей, из которых каждая отстоит одинаково от двух точек прямой. И какими бы рассуждениями они ни старались доказать, что их проблемы таким образом разрешаются, тем не менее ясно, что по природе вещей только именно это их разрешило".

Арно хочет сказать, что тот факт, что решение ведется всегда через явно или неявно использованную его аксиому, которую при окончательном обосновании стараются обойти, указывает на лежащую уже в уме некоторую тенденцию к ее признанию.

В 5-м аргументе Арно просто аппелируется к особому вниманию — своего рода апперцепции очевидности.

Особенно интересен 6-й аргумент. Вера Арно в разум так велика, что он признает возможность не только вывода всех положений из очевидных, как Гильберт, но и возможность строгого проведения всей системы доказуемых положений в некотором естественном порядке, отвечающем установленной им иерархии геометрических объектов по степени их простоты.

В 6 аргументе он выставляет необходимость установления в основе Геометрии его аксиомы для осуществления естественного порядка, как доказательства не только истинности, но и очевидности этого положения, т.-е. наличности какого-то тумана у тех, для кого это положение неясно само по себе.

6) „То, что должно уничтожить сомнение в том, что положение это можно принять, как ясное само по себе (claire d'elle même), это то, что иначе пришлось бы нарушить естественный порядок вещей и употребить трехугольники для доказательства свойств линий, т.е. с помощью более сложного объяснять более простое, что совершенно противно истинной методе".

§ 5. Херигон и Гильберт.

Если рационалисты XVII века заботились больше об очевидности основных положений, а наши современники об их минимуме, то вовсе не следует думать, что первые совсем исключили требование минимума. а вторые остаются глухи к требованиям очевидности.

Как можно меньше аксиом с слабой степенью очевидности — вот требование минимума XVII и XVIII в. в. Гильберту же при выборе своей минимальной системы постулатов приходится все-таки ограничиваться положениями очевидными, ибо иначе Геометрия перестала бы убеждать. Он позволяет только быть менее требовательным в этом отношении. Если бы он отверг требование очевидности, то, может быть, достиг бы еще большего сокращения основных постулатов, но его Геометрия тогда никого не убедила бы.

Попыток построения Геометрии при минимуме основных неочевидных положений еще не было сделано. Но они были бы необычайно интересны: в наличности тех или иных теорем они никого не убедили бы, но они дали бы знание, с точки зрения будущей науки не менее ценное,— знание логических связей между положениями Геометрии иных, чем те, с помощью которых убеждаются в их истинности.

В XVII в. ту роль, которую в недавнее время сыграл Гильберт, выполнил Херигон [20].

Аксиоматика Херигона сводится к коллекционированию очевидных истин, и он вполне уверен, что ему удастся, пополнив надлежащим образом Эвклида, собрать полную коллекцию аксиом. Он совершенно не интересуется вопросом: зависимы или независимы аксиомы его системы, и бесспорно, что в его системе аксиом существуют зависящие между собой.

Но он интересуется тем, чем современная аксиоматика менее всего интересуется. Он еще интересуется тем, чем интересовался схоластик, смотревший вглубь понятий и различавший их не столько с точки зрения операционной, как с точки зрения внутреннего содержания. Существуют геометрические объекты, играющие совершенно одинаковую роль в формально-логических операциях, логические эквиваленты относительно большей или меньшей части аксиом, лежащих в основе Геометрии, но, бесспорно, различные между собой, хотя различие определяется такими признаками, которые не укладываются в логические термины и при развертывании геометрической системы являются логически недействующими. С этой точки зрения непрерывная система точек (пунктуал), которую несет на себе окружность и сама окружность, могут быть отожествлены, ибо, например, три точки определяют этот пунктуал и вместе с тем и его носитель — окружность; прямая может иметь с ней не больше двух точек и с этим пунктуалом и с окружностью, хотя совокупность, хотя бы и бесконечная, точек и кривая — бесспорно, две различные вещи.

То же относится и к углу [21], как наклонению, и к углу в Бертрановском смысле, как неопределенному пространству, ограниченному двумя пересекающимися прямыми и т. д.

Если при коллекционировании очевидных истин избегнуть чисто формальную точку зрения, при которой происходит отожествление различных объектов, удовлетворяющих одной и той же системе формальных постулатов, то коллекция наша сильно разрастется, как это и имеет место у Херигона.

Интересно исследовать и онтологические и логические системы аксиом, которые выявляют тот же характер. У картезианца Гейлинку (Methodus, Cap. II), мы имеем, как различные аксиомы: последующее верно, если предыдущее верно; говорящий, что последующее верно, говорит, что и предыдущее верно; невозможно, чтобы предыдущее было верно, а последующее не верно и т. д.

---

[20] Herigonis. Cursus mathematicus nova brevi et clara methodo demonstatus per notas reales et universales utra usum cuiuscunque idiomatis intellectu faciles. A Paris 1634. О нем Cantor. Vorlesungen, B. II, S. 656.

[21] Бертрановское определение угла, как неопред. части плоскости, ограниченной двумя прямыми, и как наклонения, различия направлений, дают безусловно различные вещи, которые у Крелля, Бретшнейдера, Шпикера и др. различаются, как Winkel (угол), и Winkelraum (угловое пространство).

Наряду с 4 „постулатами" (3 Эвклидовских он дополняет постулатом: всегда можно взять величину большую или меньшую данной) он выставляет еще 44 аксиомы (Communes notiones).

Различие точек зрения рационалистической и современной (можно было бы сказать: логической) выступает уже в первой группе Гильбертовских[22] аксиом: $1_{1\cdot 2}$. Сопряжения (der Verknüpfung) по Гильберту:

1) Две различные точки А и В определяют прямую.

2) Любые две различные точки прямой определяют эту прямую,; эти аксиомы можно было заменить двумя взаимными (получаемыми обменом точки на прямую и обратно).

1) Две различные прямые a и b определяют точку.

2) Любые две различные прямые, принадлежащие точке, определяют эту точку.

Для Херигона же аксиомы:

1) две прямые пересекаются в одной только точке (9 a. b),

2) две прямые имеют одну только общую точку,

совершенно различные положения, в равной мере очевидные.

При этом к ним присоединяются две, устанавливающие между ними связь.

Две прямые имеют общую точки пересечения (10a. 1).

Общая точка двух прямых—это точка их пересечения (19 a. b).

При дальнейшей обработке мы получаем аксиомы:

1) Две прямые a. b имеют или все точки общими, или одну, или ни одной.

2) .... a. b. имеют или одну точку пересечения или не пересекаются.

3) Если a. b пересекаются, то имеют толью одну общую точку.

4) Если a. b имеют только одну общую точку, то они пересекаются.

5) Если a. b имеют две или больше общих точек, то не пересекаются, а совпадают.

6) Общая точка a. b в том случае, когда существует одна такая точка, всегда точка пересечения.

7) Точка пересечения a. b всегда их общая точка.

Конечно, при развертывании системы формально-логических доказательств

a и b равны между собой

можно заменить

$$a = b, \; b = a$$

установив, как основной постулат, что второе отношение a, вытекает из первого.

Но в понятии равенства между собой чувствуется нечто иное, чем совокупность двух отношений $a = b$ и $b = a$, члены которых имеют определенный порядок.

Это отношение совершенно чуждо идее порядка.

Конкретная операция проверки: (А равно В) сводится к наложению А на В, (В равно А) — к наложению В на А, — при этом основной постулат утверждает, что, если в первом случае имело место совпадение, то оно имеет место и во втором.

Проверочная операция (А и В равны) сводится к такой операции, в которой роли А и В совершенно одинаковы (в случае отрезков А и В оба переносятся так, чтобы концы их попали в одну точку и отрезки подвергаются одинаковому вращению до их совпадения).

[22] Hilbert. Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899 и др. издания.

У Херигона в его идеографии для двух этих понятий имеются различные обозначения.

a 2/2 b... a равно b
a & b snt 2/2 Fe a и b равны между собой.

Впрочем, следует согласиться, что здесь у Херигона остается неясность и недоделанность. В данном перечне его аксиом нет аксиомы $a=b \dots b=a$ и поэтому равенство a 2/2 b в его системе аксиом следует понимать скорее в смысле a и b равны между собой, чем в смысле a равно b. И здесь, как в разобранном выше случае, дальнейшая обработка аксиоматической системы согласно идеям рационализма повела бы к массе новых аксиом и к дальнейшему раздутию и без того громоздкой системы.

Обратим внимание на то, что у Херигона нет аксимы a-a.

Равенство это с Эвклидовой и его точки зрения могло бы иметь смысл только в случае двух, а не одного объекта [23].

Отношение равенства не обозначает всегда два члена.

Сказать $\triangle ABC = \triangle ABC$ все равно, что сказать, что я сам себе брат. Иное дело логическая аксиома тожества А есть А; здесь первый член не одно и то же, что второй: первый индивидуум, второй же класс. А есть А — не равенство, а отношение А к классу, состоящему из одного этого индивидуума.

Но тогда аксиома, если $a=b$, то $a+c=b+c$ не подводится под аксиому $a=b, c=d \dots a+c=b+d$ (2 акс. 1 книги Начала Евклида) и т. д.

§ 6. Алгебраическая аксиоматика Херигона.

Приведем алгебраические аксиомы Херигона.

I a) $\left.\begin{matrix} a=b \\ c=b \end{matrix}\right\} a=c$ I a. b) $\left.\begin{matrix} a=b \\ c=d \\ b=d \\ a=b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} a=c \\ c=a \end{matrix}$ I a. c) $\left.\begin{matrix} b=c \\ a>b \end{matrix}\right\} a>c$

I a. d) $\left.\begin{matrix} a=b \\ a>c \end{matrix}\right\} b>c$ I a. e) $\left.\begin{matrix} b>c \\ a>b \end{matrix}\right\} a>c$

I a. f) $\left.\begin{matrix} a+b=c+d \\ b=d \end{matrix}\right\} a+d=c+b$ II a, 1) $\left.\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}\right\} a+c=b+d$

III a. 1) $\left.\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}\right\} a-c=b-d$ III a. b) $\left.a=\frac{1}{n}b\right\} a-b=\frac{n-1}{n}b$

IV a. 1) $\left.\begin{matrix} a \gtreqless b \\ c=d \end{matrix}\right\} a+c \gtreqless b+d$ IV a. b) $\left.\begin{matrix} a=b \\ c \gtreqless d \end{matrix}\right\} a+c \gtreqless b+d$

IV a. c) $\left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} a+c>b+d$ V a. 1) $\left.\begin{matrix} a \gtreqless b \\ c=d \end{matrix}\right\} a-c \gtreqless b-d$

V a. c) $\left.\begin{matrix} a>b \\ c<d \end{matrix}\right\} a-c>b-d$ VI a. 1) $\left.\begin{matrix} a=2c \\ b=2c \end{matrix}\right\} a=b$

---

[23] В начальном основании Математики Н. Муравьева (руководстве Вольфианского типа), 1752, даются два определения:

Дефиниция 3: одинаково называются, когда одно вместо другого взять можно.

Дефиниция 4. Когда одна величина в другой один раз содержится, такие величины называются равными.

$$\text{VI a. b)}\ a > b \Big\}\ 2a > 2b \qquad \text{VI a. c)}\ \left.\begin{matrix} b = c \\ a = 2b \end{matrix}\right\}\ a = 2c$$

$$\text{VI a. d)}\ \left.\begin{matrix} a = b \\ a = 2c \end{matrix}\right\}\ b = 2c \qquad \text{VII a. }^{1})\ \left.\begin{matrix} a = \frac{1}{2}c \\ b = \frac{1}{2}c \end{matrix}\right\}\ a = b \qquad \text{VII a. b)}\ \left.\begin{matrix} c > d \\ a = \frac{1}{2}c \\ b = \frac{1}{2}d \end{matrix}\right\}\ a > b$$

$$\text{VII a. c)}\ \left.\begin{matrix} b = c \\ a = \frac{1}{2}b \end{matrix}\right\}\ a = \frac{1}{2}c \qquad \text{VII a. d)}\ \left.\begin{matrix} a = b \\ a = \frac{1}{2}c \end{matrix}\right\}\ b = \frac{1}{2}c$$

$$\text{XV a. }_1)\ \left.\begin{matrix} a - b \\ c \gtreqless d \end{matrix}\right\}\ (a + c) - (b + d) = c - d$$

$$\text{XV a. b)}\ \left.\begin{matrix} c \gtreqless d \\ a = b \end{matrix}\right\}\ (c + a) - (d + b) = c - d$$

$$\text{XVII a. }_1)\ \left.\begin{matrix} a = b \\ c \gtreqless d \end{matrix}\right\}\ (a - c) - (b - d) = d - c$$

$$\text{XVIII a. }_1)\ \left.\begin{matrix} c \gtreqless d \\ a = b \end{matrix}\right\}\ (c - a) - (d - b) = c - d$$

$$\text{XX)}\ \left.\begin{matrix} a = \frac{1}{2}b \\ c = \frac{1}{2}d \end{matrix}\right\}\ (a - c) = \frac{1}{2}(b - d) \qquad \text{XX a)}\ \left.\begin{matrix} a = 2c \\ b = 2d \end{matrix}\right\}\ (a + b) = 2(c + d)$$

$$\text{XXI a. }_1)\ \left.\begin{matrix} a\ \text{не} > b \\ a\ \text{не} < b \end{matrix}\right\}\ a = b$$

Мы пользуемся современной символикой.

Если строго различать символы 2|2 и snt 2|2 Fe u = b понимать во втором смысле, т.-е. брать

a + b 2|2 c + d
b & d snt 2|2 Fe

то не трудно видеть, что I af) вытекает из III a_1 и II a_1.

На первый взгляд представляется очень странной аксиома VI a, как будто бы тождественная I a.

Чтобы решить эту загадку, следует заметить, что 2c результат некоторой операции над c — удвоения.

Чтобы усвоить себе особое значение этой операции, следует уяснить, что такое представляла из себя Алгебра во времена Херигона.

Понятие геометрической величины подвергнуто большой эволюции.

Когда в Алгебре предлагают уравнение

$$ax^2 + bx + c = o,$$

то a, b, c считают числами, x — неизвестное тоже числом.

Но в XVII и XVIII в.в. алгебраическая величина это род, объемлющий два вида непрерывных величин, каковыми являются геометрические длины, поверхности и объемы и дискретные, т. е. числа, при чем понятие числа не идет дальше рациональной области.

ab понимается или как результат умножения числа a на b, или как результат умножения отрезка a на b, при чем понимание умножения отрезков подвергается метаморфозе. Сперва это образование прямоугольника, построенного на a и b (между a и b, как говорит Эвклид)—

результат ab — площадь этого прямоугольника, позже же (у Декарта) это отрезок, получаемый построением на OA и OC: откладывается $OA=a$, $OC=1$, приводится AC на OC, $=OB \lessgtr b$, откладывается $OB=b$ и из B проводится $BD \parallel AC$ тогда $OD = x = ab$, т. е. $x:a = b:1$.

Алгебра возможна потому, что нормальные законы операций: сложения, вычитания, умножения, деления отрезков те же, что соответствующих действий над числами.

Обращение Алгебры в численную Алгебру произошло с установкой взаимообразного соответствия между числами и геометрическими объектами.

Стоя на такой точке зрения, Херигон естественно должен был выделить удвоение, как особую операцию над величинами, так как для непрерывных величин (например, отрезков) умножение сводится к последовательным удвоениям, а само удвоение есть геометрическая операция, не производимая ни в коем случае над двумя отрезками, а только над одним. Деление же пополам, не основанное на теории подобия, коренным образом отличается от деления на 3, 4, 5 частей.

Интересно сравнить системы аксиом Херигона с системой Фортунато,[24] уже относящейся к XVIII веку.

$$\text{I. } \begin{array}{l} a,\ b,\ c \text{ части } m \\ m = a + b + c \\ a + b + c = m \end{array} \qquad \text{II. } \begin{array}{l} a,\ b,\ c \text{ части } m \\ m > a,\ m > b,\ m > c \end{array} \qquad \text{III. } a = a$$

$$\text{IV. } \left.\begin{array}{l} a = b \\ d = c \\ a = d \end{array}\right\} b = c \qquad \text{V. } \left.\begin{array}{l} a = c \\ b = d \\ c \gtreqless d \end{array}\right\} a \gtreqless b \qquad \text{VI. } \left.\begin{array}{l} a = b \\ b = a \\ c = a \end{array}\right\} c = b$$

$$\text{VII. } \left.\begin{array}{l} a = b \\ b = a \\ a = c \end{array}\right\} b = c \qquad \text{VIII. } \left.\begin{array}{l} a = b \\ b = a \\ c = d \\ d = c \\ a = c \end{array}\right\} b = d$$

$$\text{IX. } \left.\begin{array}{l} a = b \\ b = a \\ a \gtreqless c \end{array}\right\} b \gtreqless c \text{ и } \left.\begin{array}{l} c = d \\ a \gtreqless c \end{array}\right\} b \gtreqless d \qquad \text{X. } \left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} a + c = b + d$$

$$\text{XI. } \left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} a - c = b - d \qquad \text{XII. } \left.\begin{array}{l} a \text{ не} > b \\ a \text{ не} < b \end{array}\right\} a = b$$

$$\text{XIII. } \left.\begin{array}{l} a > b \\ c = d \end{array}\right\} a + c > b + d \qquad \text{XIV. } \left.\begin{array}{l} a > b \\ c = d \end{array}\right\} a - c > b - d$$

Здесь $a=b$ о п р е д е л е н н о отличается от $\left(\begin{array}{l} a = b \\ b = a \end{array}\right)$, при чем последняя символика ставится на место Херигоновских

Snt 2|2 Fe

Первая аксиома Эвклида (и вместе с тем и первая аксиома Херигона) у Фортунато разбивается на 3: IV, VI, VII.

Последние две он мог бы сплавить в одну:

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ \underline{b = a} \\ c = a \\ a = c \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = c \\ c = b \end{array}$$

Отчего аксиома VI не подводится, как частный случай, под IV, заменяя d на a?

---

[24] F o r t u n a t o a B r u n o. Elimen. Math. 1738, см. такие аксиом. опыты у R o h a u e t. Oeuvres posthumes. Euclide 1690 N e b e. Nucleus Arithmeticae. 1666.

Потому что во втором случае мы имели бы три условия a = b, a = c, a = a, с иным порядком членов при = и с недостающим условием.

Если отнести эти аксиомы к отрезкам, то геометрическое их значение будет совершенно различно:

в VII a накладывается на b, a b на a, и в обоих случаях имеет место совпадение, c накладывается на a—утверждается совпадение при наложении c на b,

в VII a на b, b на a, a на c и утверждается совпадение при наложении b на c,

в IV a на b, d на c и в обоих случаях совпадение, кроме того a на d и тогда совпадение — утверждается совпадение при наложении b на c,

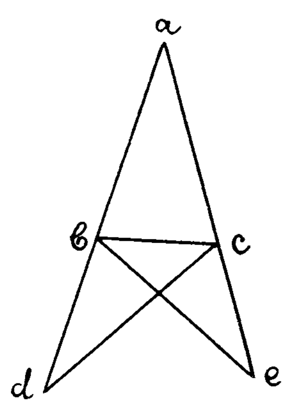
К этому времени коллектирование очевидных аксиом оказывается совершенно не по силам математиков, так как число их быстро растет, проблему о собирании всех очевидных аксиом приходится заменить проблемой о собирании тех, из которых можно вывести все положения, но при этом вовсе не ставится условие независимости этих постулатов.

Необходимость сокращения их числа вызывает к жизни аксиому a = a, которая может иметь смысл и быть признана за очевидную истину при **изменении самого смысла взаимоотношения равенства** между a и b, которое должно уже пониматься не в смысле непосредственного их взаимоотношения, а взаимоотношение каких-то двойников, создаваемых мыслью (отрезок накладывается сам на себя).

§ 7. Идеография Херигона.

Херигон при изложении Эвклида пользуется особого рода символикой.

Для ознакомления приводим доказательство 5-й теоремы I книги начал Эвклида (черт. 2).



Чертеж 2.

Hypoth.	Praep.	
ab 2|2 ac	ad est arb itr.	
abd & ace snt	3. 1	ae 2|2 ad
Req π demonstr	1. p. 1	cd & be snt—
∠ abc 2 2 ∠ acb		
∠ cbd 2|2 ∠ bce		

Demonstr.

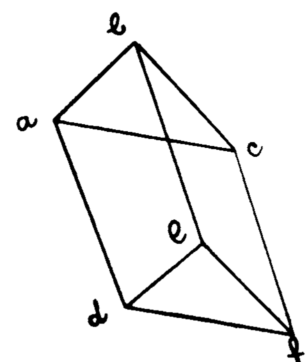
<table>
<tr><td>Constr.</td><td>ad 2|2 ae</td><td>1 and</td><td>∠ abc 2|2 ∠ ecb</td></tr>
<tr><td>hyp.</td><td>ac 2|2 ab</td><td>4. 1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">∠ commun.</td><td>4. 1</td><td>∠ dcb 2|2 ∠ ebc</td></tr>
<tr><td>4. 1</td><td>de 2|2 be α</td><td>γ</td><td>∠ acd 2|2 ∠ abe</td></tr>
<tr><td>4. 1</td><td>∠ adc 2|2 ∠ aeb β</td><td>2 and</td><td></td></tr>
<tr><td>4. 1</td><td>∠ acd 2|2 ∠ abe γ</td><td>3. a. 1</td><td>∠ acb 2|2 ∠ abc</td></tr>
<tr><td>Constr.</td><td>ad 2|2 ae</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>hyp.</td><td>ab 2|2 ac</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. a. 1</td><td>bd 2|2 ce</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>α</td><td>ac 2|2 be</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>β</td><td>∠ bdc 2|2 ∠ ceb</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Другой пример доказательств стереометрической теоремы. Если две пересекающиеся прямые соответственно параллельны двум пересекающим прямым, не лежащим с ними в одной плоскости, то углы, ими образуемые, равны:

<table>
<tr><td>Hypoth.</td><td colspan="2">Praep.</td></tr>
<tr><td>ab = de
ac = df</td><td>3. 1</td><td>ab, ac
de, df } snt 2|2 F e α</td></tr>
<tr><td>Req π demonstr
∠ bac 2|2 ∠ edf</td><td>1. p. 1</td><td>ad, bc, ef
be, cf } snt —</td></tr>
</table>

Demonstr.

<table>
<tr><td>α 33. 1</td><td>ab 2|2 ɔ = de</td></tr>
<tr><td>33. 1</td><td>be 2|2 ɔ = ad</td></tr>
<tr><td>α 33. 1</td><td>ac 2|2 ɔ = df</td></tr>
<tr><td>33. 1</td><td>cf 2|2 ɔ = ad</td></tr>
<tr><td>Concl.</td><td>bc 2|2 ɔ = ef</td></tr>
<tr><td>α 3. 1</td><td>∠ bac 2|2 ∠ edf</td></tr>
</table>



Чертеж 3,

Для того, чтобы разобрать этот шифр, необходимо иметь словари символов.

+ да
— без
F е между собой
F п в
II или
π к
; множ. число
η не

ɔ и
a^2—а в квадрате
a^3—а в кубе
= параллельны
⊥ перпендикулярно
2|2 равно
3|2 больше
2|3 меньше

a, b II a, b—прямоугольник, построенный на a и b

. есть точка	⌒ ‿ часть круга
— есть прямая	⌓ ⌓ сегмент круга
∠ угол	△ трехугольник
⌋ прямой угол	□ квадрат
○ круг	▭ прямоугольник

Словарь сокращений:

hypoth.— гипотеза... предположим, что
req. — требуется
demonstr.— доказать.
concl. — отсюда следует
цифры за чертой — ссылки на раньше доказанные теоремы
15. α. 1 — 15-е определение I книги Начал
3. a. 1 – третья аксиома I книги
c. 17. 1— королларий 17 I книги
s. 26. 3 — королларий 26 III книги
1. p. 1—первый постулат I книги
3 — I — третья теорема I книги Начал.

Херигон для пояснения своего идеографического языка приводит ряд примеров.

Часть символов Херигона переводится на нашу алгебраическую символику.

$$\left.\begin{array}{l} a\ \pi\ b\ 2|2\ c\ \pi\ d \\ \text{или } a\ \pi \mid b \\ \qquad b\ \pi \mid d \end{array}\right\}\ a:b=c:d$$

$$a\ \pi\ b\ 3|2\ c\ \pi\ d\ \left\{\frac{a}{b} > \frac{c}{d}\right.$$

$$a\ \pi\ b\ 2|3\ c\ \pi\ d\ \left\{\frac{a}{b} < \frac{c}{d}\right.$$

Идеография Херигона не единственная. Нам трудно привести словарик Угхтреда[25] по техническим условиям печатания. Он дает символы для равно, больше, меньше, не больше, не меньше, равно или меньше, равно или больше, пропорции, большее отношение, меньшее, непрерывной пропорции, большего ближайшего, меньшего ближайшего, прямоугольника, треугольника, квадрата, стороны квадрата, среднепропорционального, соизмеримых, несоизмеримых, соизмеримых и несоизмеримых в степени рационального, иррационального, среднего, линии разделенной в крайнем и среднем отношении большей и меньшей части; к этому следует прибавить еще и алгебраическую символику.

Можно указать еще и на идеографию Больье,[26] в которой наиболее употребительные слова означаются символами, напр.: найти, сделать, построить, есть, их, что и т. д.

[25] Elementa Euclidis. Declaratio Autore, Wuil. Oughtredo Anglo. Oxoniae. 1662. William Oughtred. 1574 — 1600, см. Cantor. B. II s. 720.

[26] Beaulieu. La lumière des mathématiques. 1673 (литогр.). Ему же принадлежит: La géométrie française ou la pratique aisée. 1676. См. Maupin. Opinions et curiosités touchant les mathématiques. Paris.

§ 8. Пеано и Херигон.

На первый взгляд может представиться в этой идеографии логистическая тенденция, можно увидеть в ней предтечу пасиграфии Пеано. [27]

Но сходство только внешнее. По существу же здесь огромная разница.

Возьмем ряд систем понятий.

$$\begin{array}{l} A_1,\ A_2,\ A_3 \ldots \\ A'_1,\ A'_2,\ A'_3 \ldots \\ A''_1,\ A''_2,\ A''_3 \ldots; \end{array}$$

положим, что путем некоторых операций

$$P_1,\ P_2,\ P_3 \ldots$$

над ними получаются системы:

$$\begin{array}{l} B_1,\ B_2,\ B_3 \ldots \\ B'_1,\ B'_2,\ B'_3 \ldots \\ B''_1,\ B''_2,\ B''_3 \ldots \end{array}$$

отсюда операциями: $Q_1\ Q_2,\ Q_3 \ldots$
получаются:

$$\begin{array}{l} C_1,\ C_2,\ C_3 \ldots \\ C'_1,\ C'_2,\ C'_3 \ldots \\ C''_1,\ C''_2,\ C''_3 \ldots \end{array}$$

С формальной точки зрения системы отождествляются, ибо те признаки, которыми эти системы различаются, являются логически не действующими. Для всех их устанавливается одна и та же система символов.

Так Пеано одним и тем же символом $\supset$ обозначает и вывод и отнесение к классу класса.

$a \supset b$... а вытекает b, если a, b—предложения
а есть b, если a и b—два класса.
$a \supset b.\ b \supset c\colon \supset\colon a \supset c$

можно понимать так: если из a вытекает b, из b вытекает c, то из a вытекает c, или же, если a есть b, b есть c, то a есть c.

То же относится и к $\frown$ и $\smile$ —знакам логического умножения и сложения, словесно выражаемым „и“ и „или“.

В логике предложений $a \frown b$ — совместное утверждение двух положений: стороны равны и углы равны; в логике классов $a \frown b$—класс входящий в a и b: старый немец, т. е. из класса a стариков взяты все принадлежащие ныне к классу немцев.

В логике предложений $a \frown b$ — утверждение одного из положений: A равно A, или A меньше B. В логике классов $a \frown b$ — класс, составленный из a и b, напр., $a \frown b$ выбывшие из строя, если a убитые, b раненые.

---

[27] Peano. Formulaire mathematique.
Кутюра. Принципы математики.

В этой символике не трудно прочесть положения:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 : \supset : x = 2 \smile x = 3$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0 . \frown x . y . \supset \text{ real} : \supset : x = 1 \frown y = 2$$

первое: если $x^2 - 3x + 2 = 0$, то $x = 2$ или $x = 3$;
второе: если $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ и x, y суть велич., то $x = 1$ и $y = 2$; (то и суть означены одним символом).

Таким образом проблема символики с современной точки зрения относится к операциям, которые с помощью ее должны быть ясно представлены разложенными на простейшие элементарные операции, сводящиеся, по мнению логистиков, к чисто логическим.

С точки зрения рационалистов XVII века все упомянутые системы должны означаться различными символами, именно для того, чтобы не было между ними смешения, чтобы исправить недостатки словесного языка, грешащие против II, III Паскалевых правил. Именно с этой целью и создается новый язык символов, в котором между знаками и понятиями строго определяется взаимнооднозначное соответствие.

Это не только сокращенные словесные выражения, это—замена неточного словесного выражения точной символикой.

В выражении: продолжим ab есть и неточность, так как продолжить можно, идя по прямой и по кривой; если бы bd была дугой круга, то все-таки можно было бы bd считать продолжением, хотя, правда, криволинейным и т. д.

То же относится и к обозначению

a, b II a, b прямоугольник, построенный на a, b.

Вне сомнения, в этот символ мы имеем вложить то, что может быть выражено в словах только с помощью длинного периода.

Выражение: „прямоугольник, построенный на a. b“— не говорит, конечно, все, что следует сказать. Ведь следует для полноты указать, как следует строить этот прямоугольник.

Положим, что кто-нибудь строит прямоугольник так, что a является его диагональю, a b — основанием; он будет употреблять то же выражение—прямоугольник, построенный на a и b, отличая его от прямоугольника, построенного на c. d.

С указанной выше формализацией Математики символизм операций подвергается соответственному упрощению, так как символ начинает определяться больше механизмом формальных операций и меньше объектами, над которыми производятся эти операции.

Раньше введения понятия об иррациональном числе и установки взаимнооднозначного соответствия между числами и геометрическими величинами была усмотрена система общих законов, соответствующих формальным операциям над числами и отношениями, что и вызвало взгляд на отношение, как на число.

Сперва равенство отношения означается символом, так что пропорция пишется так:

$$a : b :: c : d \text{ (Ухтред)},$$

а равенство дробей так: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

В дальнейшем один и тот же символ $=$ стал фигурировать в обоих случаях (у Х. Вольфа).[28]

Херигон предлагает обозначать:

$$\begin{array}{c|l} a\ \pi & b \\ c\ \pi & d, \end{array}$$

но чаще употребляет другое:

$$a\ \pi\ b\ 2|2\ c\ \pi\ d,$$

в котором 2|2 с точки зрения его современников можно было бы опротестовать, но $a\ \pi\ b$ еще отнюдь не отожествляется дроби $\frac{a}{b}$.

§ 9. Определение у Лейбница.

Аксиоматика Лейбница уже несколько иная. Дальнейший за ним этап, это математика без аксиом. Необходимо было старой аксиоматике умереть, чтобы на ее месте родилась новая аксиоматика.

У Лейбница схоластическая проблема о разыскании истинного правильного определения заменяется проблемой о разыскании совершенного определения.

Проблему эту он формулирует так:

Предполагается определение всех свойств, по Лейбницу терминов, заданным — найти лучшее определение.[29]

В чем же состоит совершенное определение? Оно должно содержать все условия, необходимые и достаточные, чтобы быть в состоянии доказать все свойства определяемого объекта. Одну и ту же вещь можно определить различными системами признаков:

$$\Omega \left| \begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ a_3\ldots \\ b_1,\ b_2,\ b_3\ldots \\ c_1,\ c_2,\ c_3\ldots \end{array} \right.$$

Какие же требования следует предъявлять к системе признаков, чтобы признать к ним относящиеся определения совершенными?[30] Пусть Ω присуще свойство к. Необходимо, чтобы это свойство могло быть выведено из этой системы признаков. Система признаков а может однозначно определять Ω, так что, задав а, мы всегда найдем Ω, но а сами могут быть выведены из системы $к_1$, $к_2$, $к_3$..., куда входит к.

Лейбниц признает единственность такого совершенного определения. Для вывода всех свойств необходимо иметь одну только систему совершенных признаков; всякая другая система должна оказаться недостаточной при выводе какого-либо из свойств.

Лейбниц верит, что с помощью особого рода анализа можно вскрыть это совершенное определение. Во взглядах Лейбница в особенности интересным представляется идея о возможности таких случаев, при которых такой анализ оказывается бесконечным, и ряд определяющих признаков a_1, a_2, a_3... бесконечным.

---

[29] Datis omnium terminorum proprietatibus reciprocis seu definitionibus qualibusque invenire definitiones optimi generis. Lett. à Tschirnhaus. 1679. Werke Math. IV, 481. Briefweksel I.

[30] Phil. VII. 184.

Лейбниц определенно говорит, что анализ истины может быть конечным и бесконечным. Если он конечен, то он приводит к нескольким простым положениям, из которых они выводятся; если он бесконечен, то он ведет от положения к положению, не приводя к принципу по истине простому.

Лейбниц в первую очередь при научном значении выдвигает анализ—разложение понятий на их простые элементы с помощью определения; во вторую очередь синтез, состоящий в реконструировании понятий, исходящий из этих элементов с помощью искусства комбинирования.

Познание вещи совершенно, если совершенным образом произведен ее анализ, и тогда уже возможно дедукцией вывести все свойства ее.

„Признак совершенного знания, говорит Лейбниц, это когда ничего не остается в нем такого, чему нельзя было выдвинуть основания, и нет явления, которого нельзя было бы наперед указать“.[31]

Доказательство представляется Лейбницу комбинированием простых элементов.

Лейбниц порой думает, что совершенное определение является разложением на последние простейшие элементы, дальше уже не разложенные.

Такое разложение вместе с тем дает и оправдание определения, обнаруживая возможность существования определенного объекта, так как простые элементы являются уже безусловно совместными, как диспаратные. Чтобы убедиться в непротиворечивости, следует только разложить на простые элементы.

§ 10. Аксиоматика Лейбница.

По Декарту очевидные положения недоказуемы. По Лейбницу очевидные положения можно доказывать и, он, действительно, доказывает совершенно очевидные положения.

Так, он доказывает вторую аксиому начал Эвклида, что если к равным величинам прибавить равные, то получатся равные, а также аксиому, что часть больше целого.

Кроме того, он доказывает очевидные положения чисто логического характера, и в этом смысле кладет начало математической логике. Он пытается даже доказать, что если a есть b, b есть c, то a есть c.

Он приходит к мысли о доказуемости и других очевидных положений сведением их к законам тожества и противоречия, признаком истинности которых, по мнению Лейбница, является вовсе не их очевидность, а полная невозможность без них логических операций. Можно, строя Металогику, показать, насколько эта мысль неправильна. Можно привести в движение аппарат, который по своей конструкции вполне аналогичен формально-логическому аппарату и отличается только тем, что под ним нет такого субстрата, который мы могли бы признать реальным.

Лейбницу кажется, что и сама очевидность является только следствием простоты ее доказуемости, близости этого положения к началу логической сети, узлами которой являются только эти основные законы и определения.

---

[31] Phil. IV 161, VI 490, 495, 594, VII 553.

„Откуда,—спрашивает Лейниц,—эта достоверность аксиом? Она не может итти из опыта, ибо индукция не может проверить универсальность и необходимость положений. Необходимо, чтобы она основывалась на принципе тожества и противоречия. Все положения должны быть доказуемы, кроме тожественных и эмпирических". [32]

Лейбниц заявляет, что, чтобы узнать, следует ли доказывать положение, не следует спрашивать, очевидно ли оно и несомненно, даже и то, постигается ли оно ясно и раздельно (clairement et distinctement), но тожественно ли оно или сводится ли к принципу тожества.

„Из определения,—говорит Лейбниц,—можно все доказать, кроме тожеств положений, которые уже по самой своей природе представляются недоказуемыми, и поэтому называются аксиомами: обычно аксиомы разрешением объекта или предиката, или обоих вместе сводятся к тожественным или доказуются тем, что противные предполагают, что вместе тоже и есть и не есть". Отсюда ясно, что оно приводит в конечном анализе к апагогическим доказательствам, и что некоторые схоластики были правы, сводя все аксиомы к принятому противоречию.

Здесь следует отметить, что Лейбниц ничего не говорит о принципе исключенного третьего, на котором основывается апагогическое доказательство, и отсюда можно было бы сделать заключение, что Лейбниц верил в возможность доказательств, исключительно прямых.

Но более глубокий анализ его аксиомы противоречия разделяет ее на 4 момента, при чем последние два дают аксиому исключением третьего.

1⁰ а не есть не а
2⁰ не а не есть а
3⁰ то, что не есть а, есть не а
4⁰ то, что не есть не а, есть а.

По Лейбницу правила управления разумом должны сводиться только к двум:

1. Ut nulla vox admittitur non explicata, чтобы ни одно слово не допускалось без объяснения;

2. Ut nulla propositio nisi probata.

Ни одно положение без доказательств.

Он считает их более действительными, чем четыре картезианских правила в Первой философии, из которых первое, состоящее в том, что верно лишь то, что ясно и раздельно воспринимается,—тысячи раз вводило в заблуждение.

Впрочем Лейбниц дает и другие правила, критикуя более подробно правила Декарта.

Очень характерным является его предложение в противовес Декартовскому второму правилу: изучать только такие вещи, о которых мы можем составить только определенное и несомненное знание; он советует, в том случае, когда это невозможно, довольствоваться вероятным.

При взгляде Лейбница, по которому доказательство выводом положения из положений очевидных является незаконченным, по существу обладает тем же недостатком, что доказательства из неочевидных положений, ибо те и другие, как очевидные, так и неочевидные, следует непосредственно или с помощью принципа противоречий свести к положениям тожественным.

---

[32] Phil. I, 188.
Leibnitz und Clarcke (1715 —16).

Д. Мордухай-Болтовской.

V. Генезис и история теории пределов.

(XVIII век).

§ 1. Проблема об интензировании форм.

Генезис идеи предела следует искать не в античном методе исчерпывания Эвклида[1] и Архимеда,[2] с которым ложно отожествлялся метод пределов некоторыми математиками XVIII века,[3] а в знаменитом схоластическом споре об интензировании форм.

Согласно Аристотелю и схоластикам, каждая единичная вещь состоит из двух элементов: формы и материи.[4]

Аристотелевская форма — это наследница Платоновской идеи.[5] До своего соединения с формой материя имеет возможное существование, но, соединяясь с формой, она как бы одухотворяется, приобретает актуальное существование. Она мыслится Аристотелем и схоластиками, как пустой сосуд (при возможном существовании) и как наполненный различным содержанием, сменяющими друг друга формами (при актуальном существовании). Здесь следует помнить, что Аристотелевское возможное существование отнюдь не чисто логическая возможность. Она находится как бы в высшей в сравнении с последней плоскостью существования.

То, что представляется изменением — это только последовательное соединение с рядом возникающих и погибающих форм.

Мы должны были бы углубиться в эволюцию схоластической мысли, чтобы выяснить, каким образом могли возникающие и погибающие формы Аристотеля обратиться в изменяющие формы схоластиков.

Во всяком случае, совершенно ясно, что проблема интензирования и ремизии форм (усиление и ослабление), это средневековая проблема.

Вопрос ставился сперва о том, имеет ли место интензирование, затем о том, как оно происходит.

Эмбрион идеи переменного находится именно здесь, в области этой схоластической метафизики, это изменяющаяся форма, форма, которая, оставаясь той же, сохраняя так сказать свое ядро, свою „эттость“, вместе с тем изменяется, принимая различные виды (по Д. Скотту формальности).

Но в эмбриологии идеи переменного и предела имеет значение не только тот сдвиг в воззрении на формы, отмечаемый и у более ранних, чем Скотт, схоластиков, но и скоттическое объяснение самого интензирования.

---

[1] Эвклид применяет метод исчерпывания в 2 пол. XII кн., 5 XII, 10 XII, 11 XII 12 XII, 18 XII.

[2] См. Архимед.—Две книги о шаре и цилиндре и т. д, пер. Петрушевского. 1823.

[3] Напр. de la Chapelle. Institutions de Géométrie.

[4] Aristotelis Phys. 1, 6, 7, 8, 9, II_5. III, VII, VIII,—Thomas Aquinatis Phys. I lec. 13; сильное изменение в учении о материи у Скотта. Scot. Sent lib. II dist. 12 q. см. Haureau. De la philosophie Scolastique. Paris. 1850. t. II, против дуализма формы и материи философы ранней эпохи возрождения Агриколла (1485) и Лаврентий Валла (1457).

Agricola. De inventione dialectica. Coloniae, 1527.

[5] Платон (430—348 до Р. X.) об идеях: Тимей, Федон, Федр и друг.

Аристотель о Платоновских идеях. Metaph. 1. XIII c. 4, 1, I, c. 6.

Относится ли изменение формы, к качеству, т. е. к сущности, или же к самому существованию,[6] так что новая ступень дает новое бытие.

Здесь, как и в других случаях, томисты и скоттисты ведут между собой отчаянную борьбу.

Фома Аквинат учит о радикации формы, он мыслит прибавленные степени, заключенные в потенции в форме и выступающие в актуальное бытие при изменении формы.

Он сравнивает[7] радикацию с деревом, пускающим в землю все более и более корней и, таким образом, закрепляющимся.

В форме, таким образом, уже в потенции заключается все то, чем она должна стать. Это сравнение не вполне удачно, а именно потому, что Фома признает изменение исключительно скачками, всякая изнутри выступающая новая часть — это что-то вроде современной кванты, на которую только и возможно изменение.

По Дунсу Скотту прибавляемые части идут извне, как раньше не принадлежащие форме.

Их форма впитывает, оставаясь собой, но подымаясь к высшей степени совершенства.

Для скоттистов прибавляемые степени,—это что-то возникающее вне формы, более простое и более несовершенное, чем эти формы.

Уже и в этой, весьма ранней, ступени эмбрионального развития идеи переменного мы видим ее тесно связанной с идеей предела, весьма неясные очертания которой мы можем выловить, хотя и с трудом.

Это, во-первых, полное совершенство формы.

Это конец томистической радикации, когда все содержание формы перешло из потенции в актуальность. Но это пока только ступень, которая фактически недостижима, но логически должна быть признана достижимой.

Но в большую глубину ведет рассмотрение другого конца интензирования. Томисты отказываются мыслить первое изменение с нуля.

Прежде, чем начать изменяться, форма должна создаться,[8] явиться. Это первый момент. Когда же начинается интензирование?

---

[6] Проблемы essentia et existentia, см. Aristot. Met. $IV_{3\text{-}5}$, V_{14}, X_8. Thomas Aquin. De ente et essentia. Cap. I и другие.

D. Scotti in 2 lib. sent. d. 6, q. 1.

Кроме Haureau еще сочинения по истории схоластики.

Rousselot. Etude sur la philosophie dans le moyen âge. 1840—47.

Prantl. Geschichte der Logik im Abendlande. 4 Bde.

Wulf. Histoire de la philosophie médierale.

Штеккель.— Исгория средневековой философии. 1912 г. Материалы. Migne.— Patrologia. Tiedemann.—Geist der Specul. Philos. B. IV. Marburg. 1793, также Buhle, Cousin. Fragments philosophiques. 1840 и др.

[7] Сочинения Фомы Аквинского изданы были в 1570 г.

Последнее издание Thomae Aquinatis.– Opera Omnia jussu Leonis XIII edita Romae. 1887.

Развитие идей Фомы Аквинского у Суареца. F. Suarez. Metaph. derh. tomiduo. Venetus. 1619. Disp. 16 de intensione.

О Фоме Аквинском Heaureau, t. II, ch. XXI, против Ф. Аквината.

Дунс Скотт in 1, lib. 17, q. 3. Д. Скотт. 1270—1308.

Dunsi Scotti. Opera omnia Lugd. 1639 12 vol. Об интензировании 8 Met. in. 1, lib. sent. dis. 1, q. 5. Его философию лучше всего изучать по Boyvin.—Philosophia Scotistica a prolexitate et Subtilitatibus etc. liberata et vindicata. Par. 1643.

F. E. Abergoni. Resolutio doctrinae Scoticae. Lugd. 1643. Крупнейшие скоттисты: Trans. Majronius, Ferrara, Aurelis, Burleig и другие.

[8] В прямой зависимости от Д. Скотта, вставшая против его реалистических, школа номиналистов Окама.

К ней принадлежат: Buridan, Pierre d'Ailly, Holcot, Oresmus, Biel.

Только в последний. Но тогда между моментом создания и этим протекает время, когда форма остается неизменной. Обратное изменение, ремизия формы, должно прекратиться, не дойдя до нуля.

Здесь открывается два пути — к актуально-бесконечно малому, к представлению зернистого строения континуума и к идее ассимптотического приближения.

§ 2. Эмбрион идеи функции.

Для того, чтобы спасти неизменность формы, Д. Скотт мыслит различные ее совершенства, различные формы форм в своей промежуточной области бытия, formaliter ex natura rei и называет их формальностями.[9]

Результатом победы скоттического взгляда является количественная точка зрения на основные Аристотелевские свойства, определяющие четыре эмпедокловых элемента:[10] сухость, влажность, теплота и холод.

Это — первые переменные величины, при чем сперва интенсивные, затем экстенсивные.

Из субстанциальных форм они обращаются в субстанции, в своего рода материи, с уже самостоятельным существованием, и, как таковые, вследствие занятия определенной части пространства, экстенсивными величинами. Впрочем, мысль, оперируя с этого рода величинами, находится все время в колебании: эти величины то эмансиципируются, то снова погружаются в сферы пространственного мышления.

Телезий[11] признает три элемента во вселенной: два бестелесных— тепло и холод и одно телесное — материю. Тепло идет с неба, холод из земли, и в круговороте вселенной происходит их смешение.

Тепло выгоняет холод и обратно, выгнав его из тела, может увеличиваться в своем количестве пригоком нового тепла.

Эта количественная точка зрения приводит учеников Д. Скотта к однозначному соответствию между формальностями и длинами прямолинейных отрезков и отсюда к учению о широтах форм (latitudine formarum) Н. Орезма,[12] представляющему, по существу, графическое представление форм в зависимости от времени, так что интензирующаяся форма мыслится, как функция переменного—времени longitudo; долгота—это та же абсцисса, latitudo — широта — ордината; первая определяет значение независимого переменного, вторая— функции.

Степень — gradus latitudinis, разность между двумя следующими друг за другом широтами, представляет приращение функции.[13]

---

[9] О формальностях Д. Скотта, кроме сочинений самого Д. Скотта. см. Prantl.— Geschichte der Logic im Abendlande Bd. II. Cap. XIV, c. 20. Pluzanski.— Essai sur la philosophie de D. Scott. Paris. 1887.

[10] Эмпедокл около 444. Diog. Laert. VIII, 51.

Об Эмпедокле. Arist. Met. I, 4. De generat. et corrupt. I 1, 8, II, 6 Phys., II, 4.

[11] Bernardino Telesio. 1508—1588. Его сочинение: De natura juxta propria prinapia. Romae 1565 Neap. 1586, о нем писал Бэкон. De principiis et origine etc.

[12] Орезм Николай — ученик Окама (1275 — 1337), главы позднейших средневековых номиналистов, ученика (хотя и восставшего против учителя) Д. Скотта. Guilielmi Occami, Summae logicae Oxon. 1675 и др. сочинения.

[13] Cantor.—Vorlesungen II 2, 130, сочинение Орезма. Tractatus de latitudinibus, изд Max. Curtze, в Zeitschrift für Mat. und Physik. t. XIII, s. 92.

Нуль функции — это „нестепень“ (non gradus). Но характер функциональной зависимости определяется в духе Аристотеля и схоластики качественного, а не количественного.

Случай f (x) = 0 для некоторой области изменения x характеризуется Орезмом, как „одноформенная“ степень повсюду (uniformis gradus per totum).

Этому случаю противополагается разноформенность (difformis), причем различаются: случай разноформенности повсюду и частью, чему отвечают графики: напр. образуемые кругом или прямой не параллельной OX и графика, образуемая отрезками таких кривых и прямых = OX.

Орезмом выдвигается еще одноформенная разноформенность и разноформенная разноформенность (uniformitas difformis et difformitas difformis).

В первом случае excessus graduum—приращение долготы, отвечающее определенной широте, постоянно, что будет для прямой наклонной к OX.

Не следует думать, что дальнейший ход мысли определялся только скоттической, а не томистической схоластикой. Тщательный анализ вскрывает как томистические, так и скоттические элементы в мысли XV и XVI веков. В актуально бесконечно малых, как неделимых Кеплера[14] и Кавальери[15] мы легко видим, упомянутые выше кванты Фомы Аквината и выходящие изнутри, но вместе с тем и привходящие извне формальности Скотта, обладающие каким-то неполным существованием.

Но следует отметить, что развивающийся в XVII веке рационализм по духу своему ближе к томизму. Эмбрион идеи функции, начавший развиваться в XVI столетии,[16] останавливается в своем развитии в XVII веке.

Интересно отметить, что Декарт, положивший начало Аналитической Геометрии, основанной на координатном принципе, чужд идее переменного. Уравнение кривой[17] характеризуется не функциональной зависимостью ординаты от абсциссы, характером изменения первой в зависимости от второй, а способом построения первой, когда дана вторая.

§ 3. Лейбниц и Ньютон.

Идея переменного снова, и уже определенно, выступает на закате рационализма в постепенно математизирующейся форме у Лейбница и у Ньютона.

---

[14] Kepleri.—Nova stereometria doliorum Lin. 1615. Opera omnia IV, pp. 537—538. Kantor, B. II. S. 750.

[15] Cavalieri.— Geometria indivisilibus promota Bonn. 1635 (1653), также его Exercitationes geometricae Bonn. 1647. Дальнейшее развитие у Валлиса. Wallis. Arithmetica infinitorum. Opera Mat. Oxoniae t. I. 1647. Klügel. Mat. Wörterbuch. Caval. Met. Актуально бесконечно малое еще имеется, хотя в измененном виде, у Пуассона (1883). О методе неделимых см. Brunschwigg. Les étapes de la philosophie mathématique. Alcan. 1912. Liv. III, Ch. IX p 160, см. также Pascal. Réflexions sur l'espris géométrique. Penscées et opuscules. 1909.

[16] Здесь интересно изучить знаменитый спор об угле касания между Клавием и Пелетарием.

Euclidis elementorum. Libri XV Auctore Christophoro Clavio

Hieroni Cardani. De Subtilitate, Basileae. 1554.

[17] Descartes. Géométrie. 1637, также Notes Florimond de Beaune, о нем Brunschwig. Les étapes, ch. VII, p. 113.

Это сперва величина, изменяющаяся только во времени.[18] Для всех изменяющихся величин устанавливается одно универсальное независимое переменное — это t время.

Это сперва действительное время, а затем нечто более абстрактное и общее умопостигаемое время, нечто, что в результате характеризуется одним признаком—оно может служить универсальным независимым переменным.

Эта воскресшая идея в сочетании с идеей актуальной бесконечности, крепко владевшая умами этой эпохи, дает понятие предела в той форме, как она в довольно смутном виде выступает у Лейбница, как метафизическая идея, а у Ньютона уже, как математическая.

Некоторый объект X, но не обязательно величина, изменяется. Конечный результат достигается конечным или бесконечным процессом во времени. При этом время, в продолжении которого совершается бесконечный процесс, мыслится, как актуально бесконечный промежуток времени.

Предел A мыслится всегда достигнутым X.

Предел A рассматривается, как одна из форм, можно сказать последняя форма. С этой идеей связывается основное свойство предела, выраженное Лейбницем в форме:[19]

„Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata", то-есть если данные (иначе говоря различные значения или общие формы X) известным образом упорядочены, то тот же порядок и в искомых, что следует понимать (вводя математический термин: „предел") в следующем смысле: „Свойства, присущие X во все время его изменения, остаются и в пределе".

Чисто метафизический принцип непрерывности[20] natura non facit saltus (природа не делает скачков) устанавливает существование между объектами A и Б еще промежуточного по своим свойствам объекта C=(A B)[21].

Отсюда возникает мысль о непрерывности всякого изменения, о необходимости прохождения каждым изменением объектов X непрерывной совокупности форм, из которых смежные между собой формы не различимы.

Если изменение X должно закончиться формой A, то между X и A бесконечное множество промежуточных форм. Если при изменении X какое-либо свойство X остается неизменным, оно найдется и в A, ибо, в противном случае, делается скачек и, так сказать, в последний момент, когда изменение заканчивается, X улетучивалось бы.

Поэтому принцип непрерывности с этим необходимым его следствием Лейбниц принимает за принцип общего порядка; он замечает, что его происхождение из бесконечености он безусловно необходим в Геометрии и полезен в Физике.

Порабола это—искомое (по нашему предел).

Если эллипс с бесконечно возрастающей осью datum—данное, то и то, что присуще эллипсу (например основное свойство, фокус

---

[18] Newtoni. Methodus fluxionum. 1678 в Opuscula Newtoni I. Есть на французском языке. Théorie des fluxions. Cantor III, s. 108, 168.

[19] Principium quoddam generale etc. Лейбниц. 1646 – 1716. Виндельбанд I. 1913, стр. 363. Brunschwig. Les étapes. p. 209.

Более подробная формулировка у Лейбница Animadversiones in. partem generalem Principiorum Cartesianorum Adpunct sec. ad. art. 45.

[20] Новые опыты о человеческом разуме. Пр. Мос. Псих. Общ. 1870 от 184.

[21] Лейбниц. Избран. философские сочинения. Москва 1890. Новые опыты о человеческом разуме, стр. 200.

и директриссы) остается неизменным в параболе[22]. Эти лейбницианские идеи подвергаются у Ньютона математизации.

Основная лемма метода первых и последних отношений: Величины и отношение величин, которые стремятся в данное время к равенству и в течение его могут приблизиться к нему ближе, чем на какую угодно данную разность, становятся, наконец, равны.

По латыни: Quantitas ut et quantitatum rationes, ad aequalitatem dato tempore constanter tendunt et eo pacto proprius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia fiunt ultimo aequales.

Перевод ultimo aequales проф. Крыловым[23] в „пределе равны" совершенно искажает смысл, ибо создает представление не о последней их величине, о которой идет речь, а о величине, находящейся вне сферы возможных значений X, к которой X стремится, никогда ее не достигая, как это мыслили только позднейшие математики.

Доказывается эта лемма от противного:

„Если отвергнуть эту лемму, то разность их равна D. Поэтому не могут приблизиться более, чем на D, что противно условию".

Последнее и первое отношения Ньютона: x и y не в нашем смысле $\lim \frac{x}{y}$; это значение x : y, когда x, y обращаются в нули или когда начинают рости с нуля.

Актуально бесконечно малые метода неделимых не подчинялись второму постулату Начал Эвклида[24]. Из $x=y+\alpha$, где x и y конечны, а α бесконечно мало, выводилось, что $x=y$, ибо, как говорили, α исчезало в сравнении с y[25].

Это исчезновение бесконечно-малых положено в основе техники метода флюкций Ньютона[26].

Различие между предшественниками Ньютона и самим Ньютоном то, что первые признавали особые актуально бесконечно малые постоянные величины, не подчиняющиеся некоторым основным числовым законам, Ньютон же признавал особое состояние изменяющейся величины, когда она не представляет в собственном смысле величины, а только величину зарождающуюся[27].

Можно говорить об отношении таких зарождающихся (или исчезающих) величин, но при этом из того, что $X:У=A:A$ еще нельзя вывести, что $X=У$.

Если раньше отождествлялась бесконечно-малая дуга стягивающей ее хорде[28], то Ньютон такого отождествления уже не делает.

---

[22] Принцип Лейбница в геометрической форме дает первую часть принципа непрерывности Понслэ, в силу которого свойства формы, открытые для первоначальной, распространяются на те случаи, когда некоторые ее части сделались 1) нулями, бесконечностями или 2) мнимыми. Application d'Analyse et de Géométrie t. II, p. Brunschwig Les étapes de la philosophie mathématique Paris. 1912.

[23] Newtoni. Philosophiae naturalis principia. Mat. London 1686 lib. Ньютон — Математические начала натуральной философии, пер. А И. Крылова. Известия Николаев. Моск. Академии Петроград 1915. См. также Богомолов. Общие основания Ньютоновского метода первых и последних отношений. Физ. Мат. Об. Каз. Унив. 1926.

[24] Euclidis Opera ed Heiberg. Lipsiae. 1883. Et si aequalibus aequalia adduntur tota aequalia sunt.

[25] Аксиоматика исчисления бесконечно малого конца XVII в. см. у l'Hopital Analyse der infiniments petits. 1713.

[26] Fermat. Methodus adinq. maximum et minimum. Newton. Théorie des fluxions.

[27] Сравни соответств. места в логике Гегеля.

[28] Такое отожествление элемента его эквиваленту и теперь производится, как простой методический прием, конечно, в полном несогласии с современными научными идеями. См. конец учебника геометрии Давыдова.

Для него ratio arcus est chordae et ratio aequalitatis (последнее отношение дуги и хорды — это отношение равенства) [29].

§ 4. Бертран и Кестнер.

Чрезвычайно явственно выступает различие точек зрения рационалистов XVII в. и сенсуалистов XVIII века при сравнении Вольфианских [30] учебников с очень оригинальным в свое время произведением Бертрана Женевского [31].

В основе рассуждений Вольфианцев лежит представление зернистого строения пространства, зернами которого являются актуально бесконечно—малые, в которых исчезает форма.

Это реальное строение пространства постигается своего рода созерцанием чистого разума, выходящим за пределы чувственности.

Даваемые рационалистами определения задаются целью не подведения под genus proximum (ближайший род) с помощью differentia specifica различающего признака, но вскрывают внутреннюю структуру определяемой вещи; бесконечно малый прямолинейный отрезок — некоторая концепция чистого разума, а не чувственный элемент, и из него слагается как прямая, так и кривая [32].

С сенсуалистической точки зрения XVIII века [33] математическое исследование начинается с переработки абстракцией опытного материала.

Из понятий круга и прямой, получаемых из опыта, ни одно не может претендовать на приоритет.

Понятие длины кривой не сводится к длине прямолинейного отрезка, а принимается как нечто само по себе понятное.

У Бертрана еще нет общей идеи предела и точного его определения, но отказавшись от отожествления [34] круга с polygonus infinitorum laterum infinite parvorum (с многоугольником с бесконечным числом бесконечно малых сторон) он доказывает, что длина окружности — предел вписанных и описанных многоугольников.

Но у него в основной теореме выступает не предел величины, а предел формы, так что он может быть помещен как раз в средине между Лейбницем с метафизической идеей предела и д'Аламбером, у которого эта идея подверглась, если не полной, то, во всяком случае, довольно глубокой математизации.

Теория Бертрана формулируется так:

Круг-предел расширения (de dilatation) правильных вписанных многоугольников с 6.2^n сторонами, а равно

---

[29] Понятие об эквивалентных бесконечно малых и основные леммы к ним относящиеся видимы впервые у Дюгамеля.

[30] Wolfius. Compedium elementorum Matheseos 1711. Weidleri. Institutiones Mathem. и другие. Русский учебн. напр. Аничкова. Философия Мат. акт. бесконечно малого. Iacopo Belgrado (1704—1789). De utriusque analyseos usu 1661—62, см. Cantor. B. IV § 651. Cantor B. III 270 — 271 и др места Ch. Wolff (1679—1754).

[31] Бертран Женевский. 1731—1812.

L. Bertrand. Devéllopement nouveau de la partie elémentaire des. Mathèmatiques prises dans toute son etendue. A Genève. 1778. L. Bertrand. Eléments du Géométrie Paris 1812.

См. также Cantor. B. IV. Bobynin. Lehrbuch der Géométrie § 382.

[32] De la Caille. Lectiones elementares Mathematicae 1762.

[33] О взглядах сенсуалистических см. Encyclopädie methodique, mathematiques. Eléments de Géométrie и др. Condillac. Traité des sensantions. Paradoxes и друг. Об энциклопедистах. Морель Дидро и энциклопедисты 1882.

[34] До Кеплера взгляд этот у Штиффеля—Arithmetica integra Norim. 1544.

предел сжимания (de la contraction) описанных многоугольников того же числа сторон.

Для вывода отсюда длины окружности приходится пользоваться скрытой аксиомой о том, что если объект X имеет своим пределом A, то и величина, определяемая X, имеет своим пределом соответствующую величину A, что, конечно, представляет частный случай основного положения Лейбница.

Другая скрытая аксиома: Если расстояние точек вписанных в круг (или вообще в выпуклую кривую) многоугольника, отсчитываемых по радиусу от окружности (или вообще по прямым, соединяющим какую-либо точку внутри кривой с точками последней), бесконечно уменьшаются с увеличением числа сторон многоугольника, то многоугольник бесконечно приближается к кругу.

Бертрану приходится пользоваться следующими доказуемыми им леммами:

1) Если AB хорда, SQ отрезок радиуса между дугой круга AB и хордой AB, то $SQ < {}^1/_2 AB$.

2) Если, затем, PB касательная в B к кругу, a UV отрезок радиуса между окружностью и этой касательной (от B до P), то $UV < AB$.

В этом же роде и вывод из общего положения и теоремы о площади круга.

Примером колебания между точками зрения актуальной и потенциальной бесконечности представляется теория предела у Кестнера[35].

Он замечает, что разность между сектором круга и вписанным в него треугольником OAB меньше $\triangle$ ACB (C на окружности), а площадь последнего в сравнении с OAB может быть сделана, как угодно мала.

$$C \text{ (площадь круга)} = S \text{ (площадь многоуг.)} + \alpha = S\left(1+\frac{\alpha}{S}\right).$$

Но окончательная формулировка совершенно в Вольфианском духе:

„Площадь круга одинакова с площадью многоугольника с бесконечным числом бесконечно малых сторон".

Но самый ход рассуждений проникнут уже идеей предела. Кестнер доказывает, что дуга подходит к своей хорде в желаемой близости, или, что отношения дуги к хорде может быть сделано как угодно близко к отношению 1:1, что доказывается тем, что при уменьшении дуги наибольшее расстояние ее точек от хорды может быть сделано как угодно мало.

Следует здесь заметить, что Кестнер нигде не употребляет термин: „предел", но скрытым образом пользуется лейбницианским принципом, заключая, что свойство площади равняться произведению длины периферии на апофему, присущее S, остается и у C.

§ 5. д'Аламбер и де ля Шаппель.

Только д'Аламбер дает определение предела[36].

„Говорят, что величина — предел другой величины, когда вторая может приблизиться к первой ближе, чем

---

[35] Kästner. Anfangsgründe des Arithmetik, Geometrie ebenen und sphärischen etc. Göttingen 1786. О Кестнере. Cantor III 576.

[36] д'Аламбер (1717 — 1783) см. в Encyclopädie méthodique: Limite, также Melanges de litt. d'histoire et de la philosophie. Nouv. ed., t. V. Amst 1767. Cantor-Bobynin. Статья Бобынина „Элементарная Геометрия и ее деятели во второй половине XVIII в.", есть и на русском языке.

на заданную величину, как-бы она мала ни была, без того, чтобы приближающаяся величина могла превзойти ту, к которой она приближается и затем, чтобы разность этой величины и предела была бы абсолютно не указуема".

Это определение, конечно не вполне совпадает с современным.

Во-первых, оно вовсе не требует, чтобы предел был постоянной величиной. Если мы имеем две переменные величины X и У, и X догоняет У, никогда его не достигая, то, согласно определению д'Аламбера, У будет пределом.

Во-вторых, дело идет только о переменном X, остающемся меньше предела А (хотя такое же определение тотчас устанавливается и для случая, когда X больше А). Таким образом это определение не обнимает случая предела непрерывной дроби.

Чтобы понять сделанное д'Аламбером добавление:
затем, чтобы разность этой величины и предела была бы абсолютно не указуема, предположим, что переменное X принимает значения

$$X_1,\ X'_1,\ X_2,\ X'_2,\ X_3,\ X'_3 \ldots\ldots$$

где разности $|A-X_n|$ с возрастанием n бесконечно убывают, но к $A-X'_n$ это уже не относится. А тогда уже не предел X.

На современном языке можно условие: вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую величину, как-бы мала она ни была, выразится так: сколь бы мало ни было положительное число ε, можно найти ν такое, что при $n=\nu$

$$|A-X_n|<\varepsilon.$$

Второе же условие таково: не существует ε такого, чтобы для некоторого $n>\nu$, как бы велико ни было ν, имели бы $|A-X_n|>\varepsilon$.

Различие значения переменного и предела резко подчеркивается д'Аламбером.

Предел, говорит д'Аламбер, никогда не совпадает и не становится равным величине, для которой он предел, но она приближается к нему все больше и больше и может различаться как угодно мало.

д'Аламбер не мог бы написать: $\lim 3=3$.

Идея предела и у д'Аламбера не арифметизирована.

Примеры, приводимые д'Аламбером, указывают, что дело идет не только о величине, но и о форме, как у Бертрана.

„Круг, например, предел вписанных и описанных многоугольников, так как он никогда точно с ними не совпадает, но может бесконечно с ним сблизиться".

Лейтмотивом предреволюционной мысли является идея прогресса; человечество мыслится в прогрессирующем развитии, в движении к этическому или экономическому совершенству, при котором оно постепенно приближается к идеалу, но никогда его окончательно не достигает. Это идея исторического предела, вполне соответствующая пределу математическому, впервые определенно формулируется Тюрго в „Рассуждении о всеобщей истории" и развивается Кондорсэ в его „Эскизе исторической картины прогресса человечества".

Идея предела выступает также в Маймоновском понимании Кантовской вещи в себе, которая является предельным понятием, пределом полноты сознания или сознанием иррационального предела рационального познания.

Соломон Маймон (1757 — 1800). Versuch über die Transcendental philosophie (1790). Виндельбандт II, стр. 168.

Гурьев[37] заменяет д'Аламберовское определение следующим:

„Есть ли какая-нибудь величина от какого ни есть известного без конца продолжаться могущего действия всегда возрастает или убывает и от того к другой непременной величине приближается так, что может различиться с нею меньше, нежели всякая по произволению данная взятая того же рода величина и со всем тем никогда ее не достигает, то сия другая непременная величина есть то, что пределом первой (возрастающей и убывающей) мы называема".

Возражение Гурьева относится, собственно, не к д'Аламберовскому определению предела, а к его сокращению, несколько его искажающему, в котором говорится, что „разность между переменной величиной и пределом может быть сколько угодно мала". В этом только случае и возникает отмеченная Гурьевым двусмысленность; рядом с правильным пониманием возможно и неправильное, а именно: что эта разность оказывается точно равной всякой заданной величине как бы мала она ни была.

Гурьев подчеркивает, что предел обязательно постоянное.

д'Аламбер и более тщательно де ля Шаппель[38] основывают теорию пределов на двух положениях, которым предлагаются доказательства, оставляя таким образом основные постулаты под порогом сознания:

1. Если две величины пределы одной и той же, то эти величины равны.

2. Пусть $A \times B$ произведение двух величин A и B.

Предположим, что C предел A и D предел B; я говорю:

$C \times D$ произведение пределов, необходимо есть предел $A \times B$ произведения A и B.

Первая лемма, играющая ту же роль, что лемма Ньютона, превращающаяся у позднейших авторов в обычную 1-ю лемму элементарной теории пределов: если две переменные при своем изменении остаются равными, то равны и их пределы, доказывается так:

Пусть Z и X пределы одной и той же величины Y, тогда $Z = X$, ибо если бы между ними имелась некоторая разность V, то $X = Z \pm V$. Но по предположению Y может приблизиться к X как угодно близко, т. е. разность X и Y может быть сделана как угодно мала.

Так как Z различается от X на величину V, то отсюда следует, что Y не может приблизиться к Z ближе, чем на V, и поэтому Z не может быть пределом Y, противно условию.

§ 6. Люлье, Гурьев и Ла-Круа.

Откуда ведет происхождение вторая лемма современной элементарной теории пределов?

Я думаю — из работы Люлье,[38] премированной, как лучшее в свое время сочинение на эту тему, изложение которой считалось в свое время безупречным в смысле строгости.

---

[37] Ак. Гурьев. Опыт усовершенствования элементов геометрии. СПБ 1798, стр. 34 (1766 — 1813).

Такое же определение Бланше (Blanschet); о нем Cantor-Bobynin. § 351, см. также Гурьев. Основание Геометрии СПБ 1811.

[38] De la Schaphelle. Institutions de Géométrie 1765. Simon l'Huillier (750—1840) L'Huillier. Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingen 1793, также на французском языке. Berlin. 1786.

Именно у Люлье особое значение получает предел отношения, который он еще резче Ньютона различает от предела величины, каждое определяя в отдельности.

В определении д'Аламбера еще остается, но в затушеванном виде, бесконечно малое, разность между пределом и переменной величиной, хотя это уже новое бесконечно-малое, потенциальное, а не актуальное Кеплера и Кавальери, то, про которое мы говорим, что его предел есть нуль.

Но с таким бесконечно-малым примирились лишь много позже. Люлье необходимо было строить теорию пределов без бесконечно малых.

Самое определение предела у Люлье резко отличается от д'Аламберовского, сближает с современным чисто порядковым определением:[39]

Если переменная величина всегда остается меньше данного, но при этом может сделаться больше чем всякая величина меньше данной, то она называется пределом переменной возрастающей (limes quantitatis mutabilis crescentis).

По тому же образцу ставится определение убывающей величины и также пределов отношений.

Основная лемма:

„Если всегда $X:Y = m:n$, то $\lim X:\lim Y = m:n$", доказывается методом исчерпывания (так как во многих учебниках Лежандрова типа рассматриваются случаи несоизмеримости).

Предполагается, что $m:n = A:B'$ $(B' < B)$

$$A = \lim X,\ B = \lim Y$$

и получается противоречие с поставленным определением предела.

Таким образом Люлье идет от постоянного отношения двух переменных к отношению их пределов.

В других случаях он идет от предела отношения к отношению пределов.

От $\lim \frac{X}{Y} = 1$ он заключает к $\lim X = \lim Y$, чаще от $\lim \frac{A}{X} = 1$ к $\lim X = A$, вообще, от $\lim \frac{X}{Y} = \frac{m}{n}$ к $\frac{\lim X}{\lim Y} = \frac{m}{n}$; при этом $\lim \frac{X}{Y}$ может иметь смысл и тогда, когда $\lim X$, $\lim Y$ потеряли смысл, как это и имеет место для производной, но если $\lim X$ и $\lim Y$ имеют смысл, то, конечно, имеет смысл и $\lim \frac{X}{Y}$, и можно итти в обратном направлении, чего, однако, Люлье никогда не делает.

По образцу, указываемому д'Аламбером, Бланше[40] строить теорию пределов в своем издании элементов Лежандра, заменяя ею арифметизированную Лежандром методу исчерпывания древних.

Что длина окружности и площадь круга могут быть рассматриваемы, как пределы, это признается за очевидные положения, хотя с указаниями (в духе Бертрана) на бесконечное сближение их форм.

[39] См. § 8 настоящей работы, также Russell. Einführung in die Mathemat. Philosophie. Munchen. 1923. Kap. 10

[40] Legendre (Blanchet). Elements de Géométrie.

В доказательство пропорциональности окружности радиусам скрытым образом входит признание

$$\lim \frac{X}{Y} = \frac{\lim X}{\lim Y},$$

а в доказательство теоремы Архимеда[41] вторая лемма д'Аламбера.

Впрочем еще до Бланше элементы Лежандра подверглись методистской переработке Лакруа[42], и его учебник имел очень большое влияние на учебную литературу.

Он первый вводит туда теорию пределов; под влиянием отрицательных к ней отношений самого Лежандра, обнаруживает еще большую осторожность, чем Люлье, избегая упоминания не только бесконечно малого, но даже слова „предел", хотя в основе его рассуждений, конечно, лежит идея предела.

При доказательстве первой теоремы об окружности он выдвигает Ньютоновскую лемму в следующем виде: Если две неизменные величины A и B таковы, что можно доказать, что разность между A и B меньше всякой данной величины δ, то эти величины равны: $A = B$.

К этой лемме присоединяется еще первая лемма д'Аламбера.

Изложение Гурьева иное.[43]

Из своего определения предела, как некоторого п о с т о я н н о г о, им выводится следующее заключение:

Если имеем две переменные величины X, Y, возрастающие и убывающие, так что $X < A < Y$ и при этом разность между X и Y может быть сделана меньше всякой данной величины, то A предел X и предел Y.

Если же то же имеет место и для B:

$$X < B < Y,$$

то выводится на основании однозначности предела, постулируемой первой леммой д'Аламбера, что $A = B$.

Легко видеть, какое применение находит это при выводе теоремы Архимеда.[44]

В конце концов элементарная теория пределов выкристаллизируется в ту форму, которую находим в учебниках Лежандрова типа,[45] например в русских учебниках Давидова[46] и Киселева[47].

---

[41] Площадь круга равна площади треугольника с основанием, равным длине окружности, и с высотой, равной радиусу.

[42] L a c r o i x. Eléménts de Géométrie à l'usage de l'Ecole Centrale des Quatres nations 1796—1799, в связи с ней: Essai sur l'enseignement général et sur celui des mathématiques, Paris 1816, особая переработка у G a r n i e r. Géométrie 1813.

[43] Г у р ь е в. Опыт исследования элементов Геометрии. Спб. 1798.

[44] Периметры вписанного, описанного многоугольника, длина окружности, при этом следует использовать постулат Архимеда: выпуклая объемлющая более объемлемой. В этом направлении следует переработать изложение: Остроградского, руководство Геометрии, Семашко — Элементарная Геометрия.

[45] Наиболее полные и отделанные: старый—R o u c h e e t C o m b e r o u s s e, новый N i e w e n g l o w s k i et G e r a r d. Paris. 1900.

Вне сомнения, элементарная учебная литература создала и теорию пределов в в е д е н и я в а н а л и з. Основные леммы об эквивалентности впервые встречаются у Дюгамеля.

D u h a m e l. Eléménts de Calcul Infinitesimal. Paris. 1860.

[46] Д а в и д о в.—Элементарная Геометрия. Посл. изд. 1922, стар. изд. 1867 и др.

[47] К и с е л е в — Геометрия. Москва, 1914.

§ 7. Логизация идеи пределов.

Если французам мы обязаны математизацией идеи пределов, то немцам и, еще больше, итальянцам—ее логизацией.

Следует понять, что античный математик никогда бы не признал эти теории логичными.

В то время, как античный логик, в глазах которого[48] бесконечность в силу логических противоречий, в ней таящихся, не имеет никакого права гражданства в логике, оперирует только с классами, содержащими конечное число объектов, современный логистик в самое основание своих построений кладет бесконечный класс.

Таким образом бесконечным классом в логизированной теории пределов является совокупность всех значений, принимаемых переменным:

$$a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n.$$

Конечно, для того, чтобы признать как раз то, что было с таким трудом ассимилировано, изменяющийся объект, содержащий всегда интуитивный элемент, неуловимый чистой логикой, этого мало.

Наряду с логикой классов[49] следует выдвинуть и логику отношений[50] с понятием порядка уже сомнительной логической чистоты, при чем признать так жестоко раньше отвергнутую актуальную бесконечность не только, как аморфную массу, но как бесконечность взаимоотношений между элементами.

Переменное из объекта, которому присуще больше реальности, чем переходящим значениям $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$, через которые оно проходит и о которых мы можем говорить только, если они пройдены или могут быть пройдены переменным, в конечном итоге обращается в символ, в тип расположения элементов бесконечного множества.

Но как определить последовательные элементов этого множества?

Конечно, только с помощью определенных операций над предшествующими элементами.

Можно сказать: таким образом при логизировании точка зрения из объективной становится субъективной.

Сперва объект сам изменяется (см. определения д‘Аламбера) и доказывающий становится в положение наблюдателя, теперь же объект исчез—доказывающий с помощью операций, которые тоже старается логизировать, воссоздает до какого угодно места ряд значений, принимаемых этим объектом.

Характерным признаком предела является не то, что между переменными X и A при изменении X бесконечно уменьшается разность, а то, что в ряде значений $X_1\ X_2\ X_3 \ldots X_n$, мы можем найти такое решение, что различие его от A было бы как угодно мало.

Так что и здесь опять вводится актуально-бесконечное, бесконечный класс операций, с помощью которых мы определяем разности X—A.

Арифметизированная математическая мысль признает только ряды чисел:

$$X_1\ X_2\ X_3 \ldots X_n \text{ и их предел } A.$$

Предел—определяется, как число A, для которого существуют операции, дающие для всякого ε такое n... что $|A - X_n| < \varepsilon \ldots (1)$.

Предел сперва последнее значение переменного, затем то, к чему переменное бесконечно приближается, никогда с ним не совпадая.

Сперва предел существует совершенно также, как существует каждое значение переменного; затем его бытие в роде бытия Кантовской вещи в самой себе[51] относительно мира явлений: он вне сферы изменения переменного.

Третий этап — это совершенное уничтожение реальности, предел даже в указанном смысле, что соответствует переходу от Кантовской точки зрения к Мах[52]-Авенариевской,[53] упраздняющей вещь в самой себе.

Предел выступает в смысле символа, сгущающего ряд чисел.

Условия существования предела являются условием существования предела в ином уже, чисто символическом смысле.

Несколько иная, но близко родственная точка зрения: предел — символ сходящегося, убывающего и возрастающего ряда чисел.

$$\begin{array}{c} X_1\ X_2\ X_3\ \dots\ X_n \\ \dots\dots\dots \\ Y_1\ Y_2\ Y_3\ \dots\ Y_n \end{array}$$

Тогда неравенство 1) заменяется

$$|Y_n - X_n| < \varepsilon \quad \dots \quad (2)$$

при $n > \nu$.

В геометрической теории пределов предел, конечно, ни в коем случае не может быть снизведен на роль только символа, как в арифметической, иначе, теории иррациональных чисел.

И вот между Геометрией и Арифметикой начинается разделение, начинается разарифметизирование Геометрии. За геометрическими пределами оставляется реальное, а не только символическое значение.

Второе условие (при постулировании взаимооднозначного соответствия между числом и геометрическими величинами, но между различными геометрическими величинами и отрезками) обращается в постулат Кантора[54].

Если имеются два таких класса прямолинейных отрезков, что

1) ни один отрезок первого класса не больше какого-либо отрезка и

2) при данном сколь угодно малом отрезке ε в первом и во втором классе имеется по отрезку, разность которых меньше — ε, то имеется отрезок, который не меньше какого-либо отрезка первого класса и не больше какого-либо отрезка второго класса.

При этом постулируется реальное существование такого предела.

---

[51] Кант. — Критика чистого разума, пер. Лосскаго.

[52] Мах — Механика и др. сочинения.

[53] Авенариус — Критика чистого опыта. СПБ. 1905 г.

Prolegomena zu einer Kritik der reinen Erfahrung Lpz. 1876 и другие работы.

[54] Cantor. — Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Его работы в Acta Met. II Math. Ann. 18 (1881) 21 (1883).

Идея определения предела фундаментальным рядом впервые выдвинута Мераем, Méray. — Remarques sur la nature des quantités etc. Revue des Soc. Scien. Sc. Math XIV 1869. 280. См. Теорию пределов в итальянских учебниках. A. Sannio et E. d' Ovidio. — Elementi di Geometria Napoli, 1916. G. Veronese. — Elementi. Padova, 1901. Также учебники Энриквеса, Амальди, Паолиса.

Определение длины окружности и площадей круга, в которые обращаются теперь раньше доказываемые теоремы, оправдываются [55] теперь доказательством выполняемости этих условий.

Длина окружности — предел вписанных многоугольников при удвоении числа сторон, оправдывается доказательством того, что разность между периметром n - угольника и 2 n - угольника может быть сделана, как угодно мала при достаточно большом n.

§ 8. Порядковый характер предела.

Канторовский постулат представляет, в сущности говоря, развитие первой Ньютоновской леммы, заменяемой ей равносильной первой леммой об однозначности предела.

Вывод этих лемм из остававшихся скрытыми аксиом претворяется в вывод Канторовского постулата из аксиомы Дедекинда [58] о сечении.

Пусть точки данного отрезка разделены на два класса, при чем:

1) всякая точка отрезка принадлежит одному из классов,

2) любая точка первого класса предшествует любой точке второго класса в данном направлении, тогда на данном отрезке существует такая точка, что всякая точка, ей предшествующая, принадлежит к первому классу, а всякая за ней следующая — второму.

Так как Канторовский постулат выводится из Дедекиндовского, то естественным является замена в определениях предела сечением и переход к чисто порядковому определению предела.

Длина окружности уже не предел в д'Аламберовом смысле—периметра вписанного многоугольника; длина окружности отрезок, который больше периметра всякого вписанного в нее многоугольника и меньше периметра всякого описанного.

С понятия предела теперь окончательно снимается количественный характер. Это уже чисто порядковое понятие; это только то, что следует за элементами множества A и предшествует элементам дополнительного множества A' предполагая, что нельзя указать среди элементов A последнего, а среди элементов A' — первого [56].

Собственно говоря идея предела совершила весь круг своей жизни.

То, чем, если еще не окончательно сделался, то стремится стать предел — нечто совершенно иное, чем предел д'Аламбера, хотя заменяет его в логических построениях.

Нельзя сказать, чтобы динамический характер мышления, который в определенной противоположности к статическому античной мысли, был теперь совершенно уничтожен.

Он только переведен в плоскость производимых умом операций при творчестве нескончаемых рядов объектов, но которые мыслятся уже не в движении, а окристаллизованными в своей чисто античной неподвижности.

---

[55] Энриквес. Вопросы элементарной математики, СПБ, 1913, статья де'Витали. Постулат непрерывности и его применение к Элементарной Геометрии, стр. 133. Дедекинд. — Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1909.

[56] Дальнейшее обобщение порядкового понятия о пределе см. Bertrand Russell. — Einführung in die Mathematisch. Philosophie. München, 1923. Kap. Limes und Stetigkeit. § 99.

Д. Мордухай-Болтовской.

VI. Философские элементы в эволюции методических идей в математике первой половины XIX века.

§ I. Введение.

Совершенно таким же образом, как по одной кости ископаемого животного можно восстановить весь его скелет, в частях которого отражается целое,—по одному отрывку деятельности человеческого гения определенной эпохи можно было бы при некоторой прозорливости ума начертать контуры этой эпохи. Геометрия Рамуса[1] — эта ныне уже забытая попытка низвержения в XVI веке вместе с другими кумирами и великого Эвклида[2], как капля воды отражает в себе всю эту эпоху, еще пропитанную средневековой схоластикой и мистицизмом, еще не порвавшую все цепи, связующие ее с прошлым, но с детской верой устремляющуюся в будущее. Вместо доказательств — система определений, устанавливающая иерархическую лестницу с дихотомными рамическими делениями рода на виды, взлетающая до summum genus геометрии Арно[3], с введением, трактующим о воспитательном значении геометрии, развивающей обращение с сверхчувствительными предметами, которые нам дает lux naturale, с иерархией геометрических истин по принципу Декарта: итти от простого к сложному[4], с прямыми доказательствами, заменяющими гонимые Порт-Роялевской логикой[5] апагогические — конечно отвечают: Декарт, Мальбранш и Спиноза, а не превозносящие опыт и борющиеся с метафизическими суевериями энциклопедисты, настроение которых так хорошо отражается в Institutions de Géométrie де ля Шаппеля[6], задающимися целью научить геометрии шутя, постоянно аппелируя к окружающим предметам, как поясняющим моделям.

Не всегда можно усмотреть сознательное влияние философских идей эпохи на математику, при чем такое влияние больше всего должно сказаться на низах, а не в верхах эволюционирующей математической мысли. Для исследования его следует брать учебник, а не научный мемуар.

Чаще всего соответствие между математической мыслью и философской определяется просто каким-то настроением, охватывающим все умы. Едва ли можно предположить, что философская идея прогресса[7], чуждая рационалистической эпохе и воспитанная мыслителями

---

[1] Rami. Geometriae Libri XXVII. Basileae 1569.

[2] Эвклид. Начала, пер. Петрушевского, пер. Ващенко-Захарченко. Euclides Opera omnia ed. Heiberg et Menge. Euclidis Elementa, Lipsiae 1883.

[3] (Arnaldus). Nouveaux éléments de Géométrie. Paris 1683.

[4] Descartes. Oeuvres par Amédée. Paris 1835. Regula ad directionen ingenii.

[5] La logique ou l'art de Penser. Amsterdam 1675.

[6] De la Chapelle. Institutions de Géométrie 1765.

[7] Д. Мордухай-Болтовской. Энциклопедисты и теория пределов. Речь, произнесенная 18 ноября 1917 г. в Об-ве Естествоиспытателей при Донском университете по поводу 200-летия, дня рождения д'Аламбера (не напечатана).

Кондорсэ. Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума, русский перевод. Также: Генезис и история теории пределов (в настоящем сборнике).

второй половины XVIII века, родила теорию пределов с переменным бесконечно приближающимся к некоторому постоянному, но никогда его не достигающим. Не „Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума“ Кондорсэ уже в эпоху революции повлиял на д‘Аламбера[8], а, вне сомнения, то общее настроение, которое резко выдвинули отвечающие этому настроению идеи, только много времени спустя, облекшееся в более строгие логические формы.

Я хочу обратить внимание на эпоху спекулятивной немецкой философии, начинающейся с Канта и завершающуюся Гегелем и Гербартом. Изучение старой учебной литературы дает интересный материал для суждения, если не о прямом влиянии на литературу спекулятивных философов, то о соответствии двух течений: математического и философского.

§ 2. Кант и Песталоцци.

Прежде всего о Песталоцци[9]. Метод Песталоцци обучения арифметике называется односторонне-субъективным, т. к. он придает ничтожное значение материалу, а все сводит к методу в противоположность односторонне-объективному методу вольфианцев. Арифметика имеет целью развить особую умственную способность оперировать абстрактными идеями.

Согласно гносеологическому взгляду Канта[10] число однюдь не происходит из опыта; оно его предваряет, как время и пространство. Правда, это не простая форма, как эта последняя; она результат некоторого процесса, предваряющего опыт и не выходящего за сферу форм, налагаемых нашим рассудком на материал опыта с целью его обработки в более совершенное, способное обращаться в знание, состояние.

В качестве основного материала элементарного образования Песталоцци выдвигает число, форму и название.

Роль времени в кантовском мировоззрении — у Песталоцци занимает пространство.

Наглядность Песталоцци сводится к тому, что число изучается в пространстве; не дается готовым, но извлекается оттуда с помощью оперирующего над чистыми схемами (каковыми являются числовые фигуры) процесса.

В дальнейшем же абстрактное число должно оторваться от его пространственного носителя, и все операции должны производиться уже в уме.

Из основных принципов Песталоцци вытекает преимущество умственных операций перед письменными[11].

Они не только дают более чистую гимнастику тем способностям ума, которые задается развить арифметика, но также материал для обучения третьему основному элементу образования по плану Песталоцци — называнию.

---

[8] Encyclopedie méthodique des art etc. (Diderot). Axiomes, limite и другие статьи.

[9] Песталоцци. Pestallozi. Anschaungslehre der Zahlenverhältnisse. Zürich. 1803. О Песталоцци см. E. Janicke u G. Schurig. Geschichte des Unterrichts der Mathematik in den Volkschulle. Gotha 1888 s. 63.

[10] Критика чистого разума, пер. Лосского.

[11] Впервые умственный счет вводится Келлером, затем Бирманом. F. Köhler. Anweisung zum Kopfrechnen 1797. H. Biermann. Anleitung zum Rechnen im Kopf. 1790, см. Jänicke, S. 53.

Письменное обозначение — это уже нечто производное; следует научить читать раньше, чем писать; считать раньше, чем нумеровать в числах.

Обучение выговариванию[12] у Песталоцци занимает столь же важное, если еще не более важное место, чем обучение арифметическим действиям в уме. Метод азбуки наглядности Песталоцци вполне соответствует методу его первоначального изучения арифметики.

Он идет не от конкретных предметов к геометрическим формам, но сразу обращается к простейшим типам этих форм.

Встав на точку зрения формального принципа образования, поставив главной, если не сказать единственной целью образования развитие „внутренних сил человеческой натуры", он обращает наглядную геометрию в гимнастику созерцания, но при этом чисто пассивного, геометрических форм и механического их воспроизведения вычерчиванием. Главная задача методики это — нахождение искусственных способов, увеличивающих природную способность отличения форм[13].

Здесь дело обстоит так же, как в арифметике Песталоцци — при созерцании числовой фигуры познаются учащимся операции над числами, после чего ученик сам начинает действовать, при чем все время учится говорить, высказывать все то, что он видит и делает.

В геометрии такие же скучные и однообразные упражнения, как и в арифметике.

Сперва 376 упражнений, относящихся к сравнению горизонтальных и вертикальных углов.

Затем — созерцание и образование простейших форм: параллельных прямых, прямого угла, двух прямых углов, четырех, прямоугольника. Прямая и квадрат—это два образа, лежащие в основе дальнейшего.

Дальше — необычайно длинные упражнения с квадратом и прямой, делением квадрата параллельно сторонам и диагоналям и т. д. Как в гносеологии Канта, так и в методике Песталоцци синтез стоит на первенствующем месте.

Элементы предваряют опыт, деятельность ума двояка: или комбинирующая эти элементы, или обрабатывающая из них и материала опыта — соединения.

Философская мысль Канта[15] сохраняет двойственность, характерную для его предшественников, отделявших чувственный мир от реального, для которого первый является только как-бы искаженным изображением. Этот второй мир совершенно удален из сферы знания, обратившись в вещь в себе, первый же раскололся пополам. Одно — это формы нашей интуиции или рассудка, другое — данное им, как материал для обработки.

Эти формы предваряют опыт, но не извлекаются из него; более того, они не даны в начале опыта в виде эмбрионов, чтобы затем

---

[12] 540 фраз типа: 19 раз по одному, 9 раз по 2 и 1 раз половина двух, 440 фраз: 9 раз 9 и 8 раз 9 и часть от 9 есть 89 раз; 89 единиц есть 8 раз 10 и 9 раз десятая часть от десяти; 729 фраз типа: 3 раза десятая часть от 100 есть три раза 10, 3 раза 10 есть 30 и т. д. Противники Песталоцци: Пассавант, Нимейер и др. Jänicke s. 72. Последователи: Тиллих, Шмид, Стефани, Тюрк и др. Jänicke. s. 78.

[13] Трейтлейн. Методика геометрии пер. Крогиуса. Pestalozzi. ABC der Anschanung oder Anschaungslehre der Massverhäintnisse, 1803, см. так же статьи Schurig, Geschichte der Methode der Raumlehre im deutschen Volksschulunterrichte при упомянутой выше книге Янике.

[14] Сравни с современными наглядными геометриями, дающими пропедевтические курсы Кембеля, Кулишера и других.

[15] Кант. Критика чистого разума. О Канте смотри Куно Фишер. История философии. Виндельбанд. История философии, т. II и другие.

вместе с ним эволюционировать; они или в готовом виде даны, или же вырабатываются в трансцендентальной, не зависящей от опыта, сфере.

В противоположность методике Песталоцци, методика Грубэ[16], методика 60-х годов, родилась в атмосфере, пропитанной пышно расцветшими тогда экспериментальными науками.

Опыт—вот истинный источник знания. Этот взгляд или, может быть, только настроение с ним связанное, должно было охватить и методику абстрактных знаний.

Следует резко различать опыт от наблюдения. Голое наблюдение относится пассивно к материалу, с которым душа приводится в соприкосновение опыт (или лучше сказать эксперимент) преполагает создание самим познающим определенных, наперед им задуманных, обстоятельств для намеченного им к наблюдению явления.

Следует отличать эмпиризм времен энциклопедистов (60 — 70-е годы XVIII века)[17], как эмпиризм наблюдения, от эмпиризма XIX[18] столетия (50 — 60-е годы), как эмпиризм эксперимента. Между ними периоды критической и спекулятивной философии, углубившей наше воззрение на опыт.

Метод Грубэ — метод экспериментирования над числами. Он требует прежде всего путем опыта познания чисел в их взаимоотношениях и он ищет средства воспитания сознательного арифметического мышления с помощью возможно глубокого проникновения в природу чисел.

Мы здесь видим, как анализ данного опытом материала, заменяет синтез заложенных в нас до опыта элементов.

§ 3. Кант и Тибо.

Кантовская гносеология резко отделяет интуицию от рассудка. Пространство не концепция, а априорная форма интуиции. Геометрия изучает не пространство, ибо сущность его не может быть выражена в понятиях. Геометрия скорее изучает те же операции, которые производит над интуитивным материалом конструирующая фантазия.

Именно под влиянием Кантовских идей геометрия превращается, как это имеет место у Тибо[19], в науку о построениях в пространстве (Wissenschaft der Konstruction im Raum).

Постулаты и аксиомы сливаются у рационалистов и эмпириков, у кантианцев же они опять резко разделяются.

Первые дают чисто интуитивный материал. Это первый акт конструирующей фантазии, это простейшие построения, неприводимые к другим, которые прежде всего следует изучить. Это то, что дает нам всецело интуиция.

Аксиомы же, по Тибо, это „условия, которыми связывается незнание при установке их представления". Это то, что приносит интуиции рассудок.

---

[16] Grube. Leitfaden für das Rechnen etc. Berlin 1842. Много других изданий, о нем Janicke, s. 112

Русские руководства: Паульсон. Методика арифметики. Евтушевский. Медика арифметики.

[17] Encyclopädie des Arts et des Metiers (Diderot). Об энциклопедистах см. Морей. Энциклопедисты. Основы эмпириков XVIII в. Дж. Локк. Опыт о человеческом рассудке. Наиболее крупные представители Кондильяк, Боннэ.

[18] Наиболее крупный представитель Дж. С. Милль (его система логики). Сюда следует отнести всю школу позитивистов, начиная с Ог. Конта.

[19] Tibot. Lehrbuch der Geometrie. 1822.

Именно под влиянием Канта в Геометрии выступают генетические определения. Тибо часто говорит о движении, образующем геометрические объективы. Но это движение нечто иное, чем то, которое определяется постулатами позднейших математиков 50—70 г.г. Это основной акт конструирующей фантазии. Что такое прямая? Это простейшее построение — говорит Тибо.

Для разъяснения, в чем состоит это простейшее построение, следует описать этот акт, который производит прямую.

Это — прогрессивное движение — иначе движение одного направления, так что у Тибо является раньше направление, а потом прямая.

Между двумя точками может быть проведена одна только прямая. Но Тибо кажется, что из этого рода положений не может еще выйти науки. Если прямая становится затем предметом научного исследования, то именно потому, что в ней находится единственно-количественное — ее длина, позволяющая призвать число, а нам — и рассудок с его категориями. Геометрия для Тибо, оригинального продолжателя, арифметизирующего элементарную геометрию Лежандра[20], вполне количественна; качественной геометрии, т. е. геометрии положения тогда еще не было.

То, что говорит Тибо о прямой, характерно для понимания и дальнейшего развития его идей. Что можно построить параллельную, перпендикуляр, трехугольник, четырехугольник, две пересекающиеся, круги и т. д. об этом говорит интуиция. Но на вопрос, когда возможны эти построения в логических или в духе Лежандра числовых терминах, должен ответить рассудок. Геометрия — наука о построениях—является у Тибо последовательным изучением способностей конструирующей фантазии в порядке их осложнения. Прямая дается простейшим из основных актов. Акт, производящий угол, уже сложный, составленный из таких двух основных „прогрессирующих" актов, сперва определяемых одним, затем другим направлением.

Уже при рассмотрении углов возникает понятие об эквивалентности актов.

Эквивалентными являются такие акты, которые производят те же результаты. Угол производится, как упомянутым выше сложным актом, так и простым актом вращения прямой около некоторой точки.

Другое основное понятие это — независимости и зависимости актов:

Из данной точки M я могу провести прямую, и прямую независимо от этого могу провести и из другой точки N; и количественному признаку первой (длине) могу дать какое угодно значение, не зависящее от количественного признака второй.

Из данной точки M могу описать окружность какого угодно радиуса R_1, и из другой точки M_2, независимо от этого, могу описать другую окружность тоже какого угодно радиуса R_2.

Наряду с независимыми актами над различными объектами существуют и независимые акты, произведенные над одним и тем же объектом.

Много заставила говорить о себе теория параллельности Тибо[21].

---

[20] Моя статья об Эвклиде и Лежандре. История метода наложения в элементарной математике. Матем. Образование за 1928 год.

[21] О ней смотри Schotten. Planimetrische Unterricht. B. II.

Тибо отмечает, по его мнению, очевидную независимость следующих актов: поступательного передвижения прямой, того, что соответствует „перенесению“ — translation — позднейших авторов, и вращения.

Угол производится вращением, которое только и дает изменение направления; перенесение же оставляет направление неизменным.

Вращение должно совершиться на один и тот же угол, повернем ли мы сперва прямую, а затем перенесем до совмещения с другой, или обратно: сперва перенесем, а затем повернем.

Если мы имеем два угла с паралельными (т. е. одного направления) сторонами ($l_1\ l'_1$), ($l_2\ l'_2$), то для приведения l_1 в l'_2 нам необходимо совершить вращение на угол α l_1 в l'_1, а затем перенос l'_1 в l'_2 или перенос: l_1 в l_2 и вращение l_2 в l'_2 на угол α', вследствие чего $\alpha = \alpha'$.

Таким образом устанавливается равенство углов с параллельными и одинаково направленными сторонами, в частности, соответственных углов при пересечении двух параллельных третьей прямой

Если в треугольнике A B C с двумя данными сторонами a, b, будем изменять угол C вращением этих сторон около C, то будет вместе с тем производиться акт изменения противолежащей стороны c.

Этот последний будет уже зависящим от первого актом. Эта зависимость может быть предметом научного исследования только с помощью признаков, характеризующих их независимо или зависимо, каковыми по взглядам Тибо, могут быть только числа.

Основная научная проблема Геометрии сводится к исследованию функциональной зависимости переменных величин.

При возрастании X У, всегда ли возрастает или всегда убывает или существуют переходы возрастания к убыванию или обратно (maximum'ы или minimum'ы).

Какова область изменения?

У Тибо нет обычных доказательств наложением теорем о конгруэнции трехугольников. Его изложение существенно отличается от Эвклидовского, т. к. в основе, как очевидный факт интуиции, выдвигаются не положения о равенстве фигур, но о характере изменения простейших функций [22]

В треугольнике с данными сторонами b, c Тибо подвергает изменению a и отмечает, как очевидный факт, постоянное возрастание A с возрастанием a и убывание—с убыванием и изменение в обратном направлении угла B. Отсюда (не наложением) выводится, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Если $A = \alpha$, $B = \beta$ и $\beta > \alpha$, то и треугольник, в котором $A = \beta$, $B = \beta$ и $\alpha < \beta$, будет равнобедренный, вследствие чего получаем, что сторона a с изменением A будет изменяться от одного значения к другому, ему равному, а поэтому менять противно указанной выше аксиоме вращения на убывание.

---

[22] Функциональный мотив, но без арифметизации, можно уловить и в одном Вольфианском учебнике XVIII века, отличающемся некоторой оригинальностью среди многочисленных учебников этой школы.

Horvath. Elementa Matheseos Tynaviae 1773. Теорему I Начал Эвклида Хорват формулирует так: „Если в каком-либо треугольнике АБС увеличивается угол А, причем сторона АС переходит в А с, сторона противоположная возрастает, т. е. В с > ВС и наоборот и т. д.

Кроме Эвклидовскаго Хорват приводит еще и такое рассуждение: ...ибо чем больше возрастает $\angle$ A в $\triangle$ ABC, тем более расходятся крайние точки B и C, тем более BC приближается к сумме сторон AB и BC и, наоборот, чем больше убывает угол A в $\triangle$ ABC, тем крайние точки B и C больше сходятся, сторона Bc больше приближается к A B.

Отсюда же выводится и первый случай конгруэнтности. Таким же образом из непосредственно путем интуиции устанавливаемого характера изменения с при данном С и изменения В (которое уже не является монотонным, а имеет minimum) устанавливается 4-ый случай конгруэнтности.

Также выводится, что в трехугольнике одна сторона меньше суммы двух других.

Так для остроугольного трехугольника $b < a + c$, ибо он представляет или равнобедренный треугольник, для которого $a = c$ и $b < a = c$ или получается из него через увеличение одного угла A при неизменности стороны b, и потому через увеличение стороны a, в каковом случае опять $b < a + c$.

§ 4. Гегель и Понсле.

Я не буду здесь развивать историю немецкой спекулятивной философии, выводить гегельянские идеи из кантовского критицизма. Указав отрывок из методической литературы по чистой математике с явным влиянием кантовских идей, я представляю теперь же математические идеи, в которых определенно звучит гегельянский мотив.

Кант разбил веру в силу силлогистической логики, в возможность решения с ее мощью метафизических проблем. Спекулятивная философия Шеллинга и Гегеля[23] не возвращается к до-кантовской точке зрения, но идет дальше, стараясь найти для вселенной схему, подчиненную иной диалектической логике, не подчиняющейся закону противоречия. Вся вселенная представляется окаменелой мыслью, развитием идеи, идущей через иерархию понятий, располагающихся в троицы: тезис, антитезис и примиряющий их синтез.

Первая стадия — чистое бытие (тезис), которое таит в себе противоречие, так как при своей полной бессодержательности совпадает с ему противоположным понятием небытия. Оба понятия входят, как моменты, в понятие уже высшего порядка становления, в котором указанное противоречие снято.

Качество и количество, тоже скрывая в себе противоречие, примиряются в мере[24] и т. д.

Можно сказать, что к диалектике философскую мысль привела идея предела, если только понимать последнюю не в узко-математическом смысле, а в более общем метафизическом или гносеологическом смысле.

При признаваемой рационализмом актуальной бесконечности предел есть одно из значений, последнее значение переменного, но с точки зрения отвергающих эту бесконечность эмпиризма и критицизма—предел недостижим, он вне сферы изменения переменного.

Пусть математический объект X определяется некоторыми признаками

$$a, b, c\dots\dots$$

при чем эти признаки всегда подчиняются некоторым условиям, например: $a > o$. Объект X будет оставаться, как бы a ни было мало.

---

[23] Шеллинг и Гегель, см. Куно-Фишер. История новой философии.

[24] G. W. Hegel's. Werke. Berlin. 1883. Wissenschaft der Logik.
Гегель. Логика, пер. Чижова.
Старые сочинения о Гегеле: Karl Fischer, Michelet и другие.

Но что будет при $a = 0$? С одной стороны не X, так как X определен при условии $a > 0$, с другой стороны это X, ибо A предел X, а все свойства остаются неизмененными при изменении X, а поэтому принадлежит и пределу A.

Очень характерно определение предела в учебнике Лежандровского типа Бескибы[25], выраженное в терминах гегелевской логики: „Предел—это наиболее внешнее вещи, в чем снимается то, что было, и начинается то, чего не было".

Таким образом имеются два момента A и B внешние друг другу, согласно Гегелевской терминологии.

Когда A перестает быть A, становясь B, а B перестает быть B, становясь A, мы имеем пределы A.

Это не математическое, а чисто метафизическое определение старающееся захватить определение общего, но смутного понятия предела, не поддающегося математизации, проводимое в духе Гегелевской диалектики, выступает, как синтез противоположностей A (тезис) и B (антитезис).

Это направление мысли породило то, что можно назвать понятиями—вырождениями или несобственными понятиями.

Угол определяется по Бертрану[26] как часть плоскости, ограниченная двумя пересекающимися прямыми. Но уменьшайте также смежный угол. В пределе пересечения уже не будет, и одна сторона будет служить продолжением другой.

С одной стороны это угол. Ибо, если скажем, что это не угол, то можно спросить, с какого же момента A O B перестает быть углом. С другой стороны, мы можем сказать, что это не угол, ибо мы имеем не пересекающиеся, а совпадающие прямые.

Таким образом выступает понятие развернутого угла (Gerader Winkel).

Прямой угол определяется уже, как половина развернутого угла, так что в последовательных учебниках отпадает теорема о равенстве двух прямых углов. Доказательство же теоремы о сумме двух смежных углов сводится просто к замечанию, что эта сумма равна развернутому углу, уже по самому определению прямого угла вдвое большему последнего.

В Гегелевский период возникает и понятие о бесконечно-удаленной точке[27] прямой. Сам Эвклид нигде не обнаруживает такого понятия. Вращающийся в области бесконечного Кестнер[28] говорит о бесконечном продолжении прямой, но у него не одна, а две бесконечно удаленные точки прямой. Но Кестнеровские бесконечно удаленные точки забываются другими авторами.

Бесконечно удаленная точка прямой, бесконечно удаленная прямая плоскости и бесконечно удаленная плоскость пространства—эти так называемые необыкновенные элементы[29] Проэктивной геометрии, являются в Гегелевском смысле деалектическими элементами Геометрии.

---

[25] I. Beskiba. Lehrbuch der Geometrie. Wien 1826.

[26] Bertrand. Dévélloppement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques A. Genève 1778.
Его-же. Eléments de Géométrie. Paris 1812. См. о нем Cantor. B IV (Bobynin). Lehrbuch der. Geometrie § 382.

[27] См главным образом Baltzer. Die Elemente der. Mathematik XII. Leipzig 1870. Правильный взгляд на бесконечно удаленную точку следует отнести к Гауссу. Lettre de Gaussa Schumacher. t II, p. 268.

[28] Kästner. Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie ebenen und sphärischen etc Göttingen. О Кестнере Cantor III, p. 576.

[29] Reye. Die Geometrie der Lage и другие руководства по Проэктивной Геометрии: Staudt, Staudigl, Cremona, Enriques и другие.

Две параллельные прямые не пересекаются, но, с другой точки зрения, они пересекаются в бесконечно удаленной точке, ибо основной принцип теории пределов, выработанный предшествующей стадией математической мысли, заставляет признать, что свойство пересекаемости, остающееся при всем вращении около одной из ее точек, остается и в предельном положении параллельности.

В связи с этим возникает понятие луча, и угол определяется, как различие направлений двух, выходящих из одной точки, лучей.

В эту эпоху провозглашается Понслэ (1818) принцип непрерывности[30], по которому свойства, доказанные для какой-нибудь фигуры, распространяются и на случаи вырождения, если к этому случаю можно подойти непрерывным изменением.

Так, например, пространственная теорема Дезарга[31]: „Если соответственные вершины двух треугольников лежат на прямых, сходящихся в одной точке, то соответственные стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой“, влечет в силу этого принципа плоскую теорему Дезарга, отвечающую предельному случаю наклонения друг к другу плоскостей треугольников. Этот принцип или аксиома, решительно оспариваемая Коши, не найдя себе математического обоснования, была потом признана имеющей не логическое, а лишь эвристическое значение. Применение ее давало логику не доказательств, а системы, которая делает из совокупности теорем связное целое, в котором один момент вызывает в силу намеченного плана системы и смежные моменты.

Главные элементы Геометрии распределяет в диалектическую лестницу уже сам Гегель, а дальнейшую обработку этой диалектики геометрии берет на себя Франц[32], вызывая у Шоттена[33] насмешку и значительно более серьезное к себе отношение у Дельбефа[34].

Происхождение прямой, как синтез точки, как рода пространства (тезис) и его отрицания (антитезис), конечно, не имеет значения.

Не иначе дело обстоит с диалектикой прямой, являющейся, как количество — мера расстояния (см. Лежандр), с другой же стороны, как качество — направление. То, что здесь мыслится о прямой, мыслится о всем пространстве.

Пространство является не только, как количество, но и как качество, и последний момент не сводится к первому. Нельзя числом определить „направо“ или „налево“ или другие факты распорядка геометрических объектов.

Идея, что пространство не только количество, но и качество, пока еще метафизическая идея.

Но уже в 40 г.г. XIX столетия она становится математической, когда создается геометрия положения Штаудта.

Двум моментам: количеству (расстояние) и качеству (направление) должны отвечать (по Бретшнейдеру, 1844, Шниц-Дюмонду) две Геометрии, исследующие: 1) положение, 2) величину, которые вместе образуют 3) органическую геометрию (Гегелевский синтез — мера). Здесь интересно привести несколько определений Геометрии, характерных для эволюции понятия об этой науке.

---

[30] Poncelet. Traité des propriétés perspectives des figures. Paris. 1882.

[31] Теорема Дезарга см. Brouillon project d'une atteinte и т. д. Oeuvres de Desargues pub. par. Fondra. Paris. 1864.

[32] Franz. Die Philosophie der Mathematik. Leipzig. 1842.

[33] Schotten. Inhalt u. Methode d. Planimetrische Unterrichts.

[34] Delboeuf. Prolegomènes.

До Лежандра [35] геометрия—это учение о пространственных величинах (Ламберт). Для Лежандра это „la mesure de l'etendue“ просто измерение пространства.

Для Тибо это наука о построениях и в этом духе и для Ульриха и др. немецких методистов.

Для Бретшнейдера геометрия превращается в учение о геометрических формах.

§ 5. Гербарт и Больцано.

От Канта идут два главных течения: первое через Фихте и Шеллинга к Гегелю, [36] второе к Гербарту.

Первое развертывает телеологическое мировоззрение после разрушения Кантовской критикой старой догматики, ищет новых объяснительных принципов в новой диалектической логике, из которой изъят закон противоречия, стараясь построить с помощью ее общую схему мирового процесса, идущего по трехчленной системе: тезиса, антитезиса и их примиряющего синтеза, к определенной цели.

Второе, ясно выраженного каузального направления, остается при силлогистической логике, и вскрытую Кантом немощность догматизма в сфере метафизических построений видит в скрытой противоречивости тех общих понятий, которыми пользовался догматизм.

Второе направление, сперва более слабое, в конце концов побеждает.

Следует иметь в виду, что оба направления интеллектуалистичны. Во взглядах на пространство и на математику они решительно становятся против Канта. Для них математические положения являются аналитическими, связанными с понятиями логически, хотя последнее понимается различно Гегелем и Гербартом.

Оба концептуализируют пространство, первый—пытаясь включить его в свою диалектическую цепь,[37] второй, стараясь установить надлежащим образом очищенное понятие пространства, из которого чисто силлогически извлекалось содержание Геометрии.

Для Гегеля пространство дается уже готовым, как и все вообще понятия.

Он не отвергает содержащиеся противоречия, ибо все понятия, через которые движется абсолютная идея, содержат противоречия, которые, снимаясь, ведут к понятиям, выше стоящим на диалектической лестнице.

Гербарт же, наоборот, исправляет понятие, отбрасывая из признаков (a. b. c. . . . . . d. e. f.) противоречащие (d. e. f), а иногда пополняя еще новыми (a. b. c. . . . .) так, чтобы силлогистический аппарат мог быть приведен в движение.

Конечно, такая чистка понятий ведет к построению чрезвычайно общих схем вселенной и, в конечном итоге, дает с увеличением объема обеднение содержания исправляемых понятий.

Гегелевское настроение, развивавшее дух системы, склоняющее к розысканию на основании невыводимых, но предполагаемых принятой системой принципов—недостающих звеньев этой системы, давало нестрогую, но быстро идущую вширь математику.

---

[35] Legendre. Elements de Géométrie напр. Paris. 1837.

[36] Chalibäus. H. M. Historische Entwickelung der speculativen Philosophie von Kant bis Hegel. Leipzig. 1839. Также Michelet и другие.

[37] Философия природы.

Гербартовское же, наоборот, разрушало систему вскрываемыми логическими связями, разрушая прежнюю симметричность аксиоматических систем, насильственно обращая положения в определения и искажая последние с целью сделать их более логически плодовитыми; оно устремлялось вглубь, требуя замены много мало основанного нестрогой математики немногим хорошо обоснованным—строгой.

Наряду с эмпирическим пространством Гербартом выдвигается другое умопостигаемое, очищенное и являющиеся уже не как форма интуиции, а как концепция, как пространство, вмещающее Гербартовы реалии, этот метафизический остаток от очистки материала опыта.

Чрезвычайно общее Гербартовское пространство, возникающее из понятий совместности, смежности и раздельности, математически не жизненное, является отцом Грассмановского протяжения [39] и дедом Римановского многообразия [40] (Summum genus) пространства, объемлющего и Эвклидово и не—Эвклидово пространства. Таким образом Гербартовское построение ведет к Метагеометрии. Но оно же ведет к математической аксиоматике вообще, ибо по существу Гербартова философия—это метафизическая аксиоматика.

Больцано [41] дает в чистой математике то, что старался дать в метафизике Гербарт. Он исправляет понятие и старается привести с помощью уже исправленных понятий в движение логический аппарат над чисто логическим содержанием. Конечно, прежде всего должна подвергнуться радикальной переработке бесконечность. Эта работа только начата Больцано, а закончена Г. Кантором [42].

Больцановская бесконечность — это не бесконечность Фонтенеля, [43] ибо такая бесконечность несет противоречие, ее же снедающее. Бесконечная величина по Больцоно—это актуальная бесконечность, а не потенциальная, которая возрастает безгранично и может быть сделана больше всякой данной величины, это не то, что не способно к дальнейшему возрастанию, не то, что является последним в ряду возрастающих величин, а то, что больше всякой данной величины, это первая величина высшего подымающегося над классом конечных величин классом—класса.

Эта бесконечность, действительно, очищена согласно Гербартовскому рецепту, но она бесплодна, так как актуальная бесконечность, служившая к обоснованию положений анализа, изгоняется оттуда Больцано. Вместо же рабочей идеи является потенциальная бесконечность в маскирующей ее форме переменной величины, которая может быть сделана более всякой данной положительной величины.

Актуальная бесконечность, чтобы сделаться тоже рабочей идеей, чтобы создать логическое обоснование анализа, должна была подвергнуться дальнейшей проработке.

Взаимно однозначное соответствие между элементами двух бесконечных множеств у Больцано еще не представляет определения их равенства. Множество точек на конечном отрезке не указывается равным множеству точек на всей прямой, как у Кантора, но Больцано

---

[39] N. Grassman. Die Ausdehungslehre. Berlin. 1862.
V. Schlegel. Die Grassmanische Ausdehungslehre. Leipzig. 1896.

[40] Riemann. Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Gött. Abhandlungen XIII. 1868. Есть и на русском языке.

[41] Bolzano. Paradoxen des Unendlichen.

[42] Кантор. Учение о множествах

[43] (Fontenelle). La géometrie de l'infini.

ясно сознает, что здесь имеет место взаимооднозначное соответствие, которое для конечных множеств является условием необходимым и достаточным для равенства.

В Канторовской переработке актуальная бесконечность получает приоритет в сравнении с потенциальной, так как стремится к логическому обоснованию, очищенному от интуиции теории иррациональных чисел, привела к признанию последнего, как символа так называемого фундаментального ряда рациональных чисел:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ \ldots\ a_n,$$

удовлетворяющих условию $\lim\ (a_{\nu\ +\ n} - a_\nu) = 0$,

т. е. к положению в самой основе анализа актуальной бесконечности совокупности некоторых элементов.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Ответственный редактор **Л. Ефременко.**